P.3 Funciones y sus gráficas

- **Usar la notación de función para representar y evaluar funciones.**
- **Encontrar el dominio y recorrido o rango de una función.**
- **Trazar la gráfica de una función.**
- **Identificar los diferentes tipos de transformaciones de las funciones.**
- **Clasificar funciones y reconocer combinaciones de ellas.**

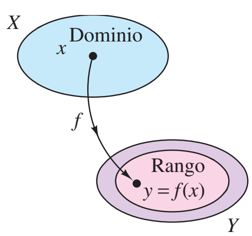
Funciones y notación de funciones

Una **relación** entre dos conjuntos X y Y es un conjunto de pares ordenados, cada uno de la forma (x, y), donde x es un elemento de X y y un elemento de Y. Una **función** de X a Y es una relación entre X y Y con la propiedad de que si dos pares ordenados tienen el mismo valor de x, entonces también tienen el mismo valor de y. La variable x se denomina **variable independiente**, mientras que la variable y se denomina **variable dependiente**.

Muchas situaciones de la vida real pueden describirse mediante funciones. Por ejemplo, el área A de un círculo es una función de su radio r.

$$A = \pi r^2 \qquad \text{A es una función de r.}$$

En este caso, r es la variable independiente y A, la variable dependiente.



Una función real f de una variable real
Figura P.22

DEFINICIÓN DE FUNCIÓN REAL DE UNA VARIABLE REAL

Sean X y Y conjuntos de números reales. Una **función real f de una variable real x** de X a Y es una regla de correspondencia que asigna a cada número x de X exactamente un número y de Y.

El **dominio** de f es el conjunto X. El número y es la **imagen** de x por f y se denota mediante $f(x)$, a lo cual se le llama el **valor de f en x**. El **recorrido o rango** de f se define como el subconjunto de Y formado por todas las imágenes de los números de X (ver la figura P.22).

Las funciones pueden especificarse de muchas formas. No obstante, este texto se concentra fundamentalmente en funciones dadas por ecuaciones que contienen variables dependientes e independientes. Por ejemplo, la ecuación

$$x^2 + 2y = 1 \qquad \text{Ecuación en forma implícita.}$$

define y, la variable dependiente, como función de x, la variable independiente. Para **evaluar** esta función (esto es, para encontrar el valor de y correspondiente a un valor de x dado) resulta conveniente despejar y en el lado izquierdo de la ecuación.

$$y = \frac{1}{2}(1 - x^2) \qquad \text{Ecuación en forma explícita.}$$

Utilizando f como nombre de la función, esta ecuación puede escribirse como:

$$f(x) = \frac{1}{2}(1 - x^2). \qquad \text{Notación de funciones.}$$

La ecuación original $x^2 + 2y = 1$ define **implícitamente** a y como función de x. Cuando se despeja y, se obtiene la ecuación en forma **explícita**.

La notación de funciones tiene la ventaja de que permite identificar claramente la variable dependiente como $f(x)$, informando al mismo tiempo que la variable independiente es x y que la función se denota por "f". El símbolo $f(x)$ se lee "f de x". La notación de funciones permite ahorrar palabras. En lugar de preguntar "¿cuál es el valor de y que corresponde a $x = 3$?" se puede preguntar "¿cuánto vale $f(3)$?"

NOTACIÓN DE FUNCIONES

Gottfried Wilhelm Leibniz fue el primero que utilizó la palabra *función*, en 1694, para denotar cualquier cantidad relacionada con una curva, como las coordenadas de uno de sus puntos o su pendiente. Cuarenta años más tarde, Leonhard Euler empleó la palabra "función" para describir cualquier expresión construida con una variable y varias constantes. Fue él quien introdujo la notación $y = f(x)$.

En una ecuación que define a una función, el papel de la variable x es simplemente el de un hueco a llenar. Por ejemplo, la función dada por

$$f(x) = 2x^2 - 4x + 1$$

puede describirse como

$$f(\square) = 2(\square)^2 - 4(\square) + 1$$

donde se usan paréntesis en lugar de x. Para evaluar $f(-2)$, basta con colocar -2 dentro de cada paréntesis.

$$\begin{aligned} f(-2) &= 2(-2)^2 - 4(-2) + 1 && \text{Sustituir } x \text{ por } -2. \\ &= 2(4) + 8 + 1 && \text{Simplificar.} \\ &= 17 && \text{Simplificar.} \end{aligned}$$

NOTA Aunque es frecuente usar f como un símbolo adecuado para denotar una función y x para la variable independiente, se pueden utilizar otros símbolos. Por ejemplo, todas las ecuaciones siguientes definen la misma función.

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 - 4x + 7 && \text{El nombre de la función es } f\text{, el de la variable independiente es } x. \\ f(t) &= t^2 - 4t + 7 && \text{El nombre de la función es } f\text{, el de la variable independiente es } t. \\ g(s) &= s^2 - 4s + 7 && \text{El nombre de la función es } g\text{, el de la variable independiente es } s. \end{aligned}$$

EJEMPLO 1 Evaluación de una función

Para la función f definida por $f(x) = x^2 + 7$, calcular:

a) $f(3a)$ ***b***) $f(b-1)$ ***c***) $\dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}, \quad \Delta x \neq 0$

Solución

a)
$$\begin{aligned} f(3a) &= (3a)^2 + 7 && \text{Sustituir } x \text{ por } 3a. \\ &= 9a^2 + 7 && \text{Simplificar.} \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} f(b-1) &= (b-1)^2 + 7 && \text{Sustituir } x \text{ por } b-1. \\ &= b^2 - 2b + 1 + 7 && \text{Desarrollar el binomio.} \\ &= b^2 - 2b + 8 && \text{Simplificar.} \end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} &= \frac{[(x+\Delta x)^2 + 7] - (x^2 + 7)}{\Delta x} \\ &= \frac{x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2 + 7 - x^2 - 7}{\Delta x} \\ &= \frac{2x\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} \\ &= \frac{\cancel{\Delta x}(2x + \Delta x)}{\cancel{\Delta x}} \\ &= 2x + \Delta x, \quad \Delta x \neq 0 \end{aligned}$$

AYUDA DE ESTUDIO En cálculo, es importante especificar con claridad el dominio de una función o expresión. Por ejemplo, en el ejemplo 1*c*, las expresiones

$$\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \quad \text{y} \quad 2x + \Delta x, \quad \Delta x \neq 0$$

son equivalentes, ya que $\Delta x = 0$ se excluye del dominio de la función o expresión. Si no se estableciera esa restricción del dominio, las dos expresiones no serían equivalentes.

NOTA La expresión del ejemplo 1*c* se llama *cociente incremental* o de *diferencias* y tiene un significado especial en el cálculo. Se verá más acerca de esto en el capítulo 2.

Dominio y recorrido o rango de una función

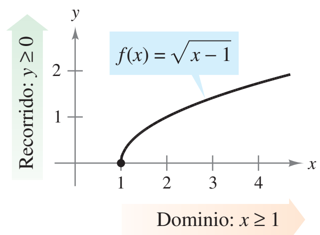
El dominio de una función puede describirse de manera explícita, o bien de manera *implícita* mediante la ecuación empleada para definir la función. El dominio implícito es el conjunto de todos los números reales para los que está definida la ecuación, mientras que un dominio definido explícitamente es el que se da junto con la función. Por ejemplo, la función dada por

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - 4}, \quad 4 \leq x \leq 5$$

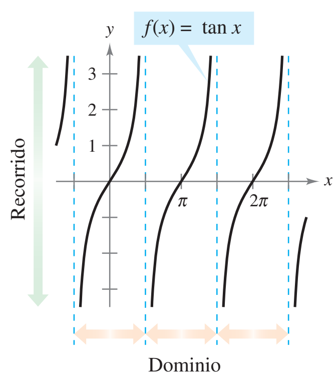
tiene un dominio definido de manera explícita dado por $\{x: 4 \leq x \leq 5\}$. Por otra parte, la función dada por

$$g(x) = \frac{1}{x^2 - 4}$$

tiene un dominio implícito: es el conjunto $\{x: x \neq \pm 2\}$.



a) El dominio de f es $[1, \infty)$ y el recorrido o rango $[0, \infty)$



b) El dominio de f lo constituyen todos los valores reales de x tales que $x \neq \frac{\pi}{2} + n\pi$ y el recorrido o rango es $(-\infty, \infty)$

Figura P.23

EJEMPLO 2 Cálculo del dominio y del recorrido de una función

a) El dominio de la función

$$f(x) = \sqrt{x-1}$$

es el conjunto de los valores de x tales que $x - 1 \geq 0$; es decir, el intervalo $[1, \infty)$. Para encontrar el recorrido o rango, se observa que $f(x) = \sqrt{x-1}$ nunca es negativo. Por ende, el recorrido o rango es el intervalo $[0, \infty)$, como se señala en la figura P.23*a*.

b) Como se muestra en la figura P.23*b*, el dominio de la función tangente

$$f(x) = \tan x$$

es el conjunto de los valores de x tales que

$$x \neq \frac{\pi}{2} + n\pi, \text{ con } n \text{ entero.}$$

Dominio de la función tangente.

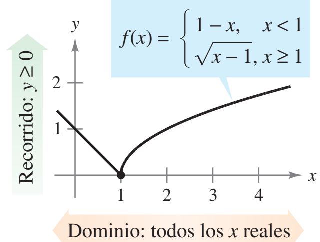
El recorrido o rango de esta función es el conjunto de todos los números reales. Para repasar las características de ésta y otras funciones trigonométricas, ver el apéndice C.

EJEMPLO 3 Una función definida por más de una ecuación

Determinar el dominio y el recorrido o rango de la función

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x, & \text{si } x < 1 \\ \sqrt{x-1}, & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

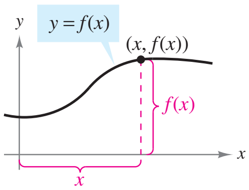
Solución Puesto que f está definida para $x < 1$ y $x \geq 1$, su dominio es todo el conjunto de los números reales. En la parte del dominio donde $x \geq 1$, la función se comporta como en el ejemplo 2*a*. Para $x < 1$, todos los valores de $1 - x$ son positivos. Por consiguiente, el recorrido de la función es el intervalo $[0, \infty)$. (Ver la figura P.24.)



El dominio de f es $(-\infty, \infty)$ y el recorrido es $[0, \infty)$

Figura P.24

Una función de X a Y es **inyectiva** (o uno a uno) si a cada valor de y perteneciente al recorrido o rango le corresponde exactamente un valor x del dominio. Por ejemplo, la función dada en el ejemplo 2*a* es inyectiva, mientras que las de los ejemplos 2*b* y 3 no lo son. Se dice que una función de X a Y es **suprayectiva** (o sobreyectiva) si su recorrido es todo Y.



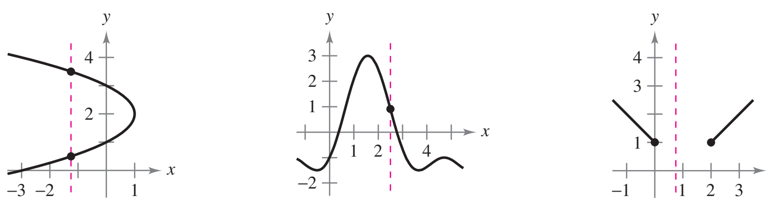
Gráfica de una función
Figura P.25

Gráfica de una función

La gráfica de una función $y = f(x)$ está formada por todos los puntos $(x, f(x))$, donde x pertenece al dominio de f. En la figura P.25, puede observarse que

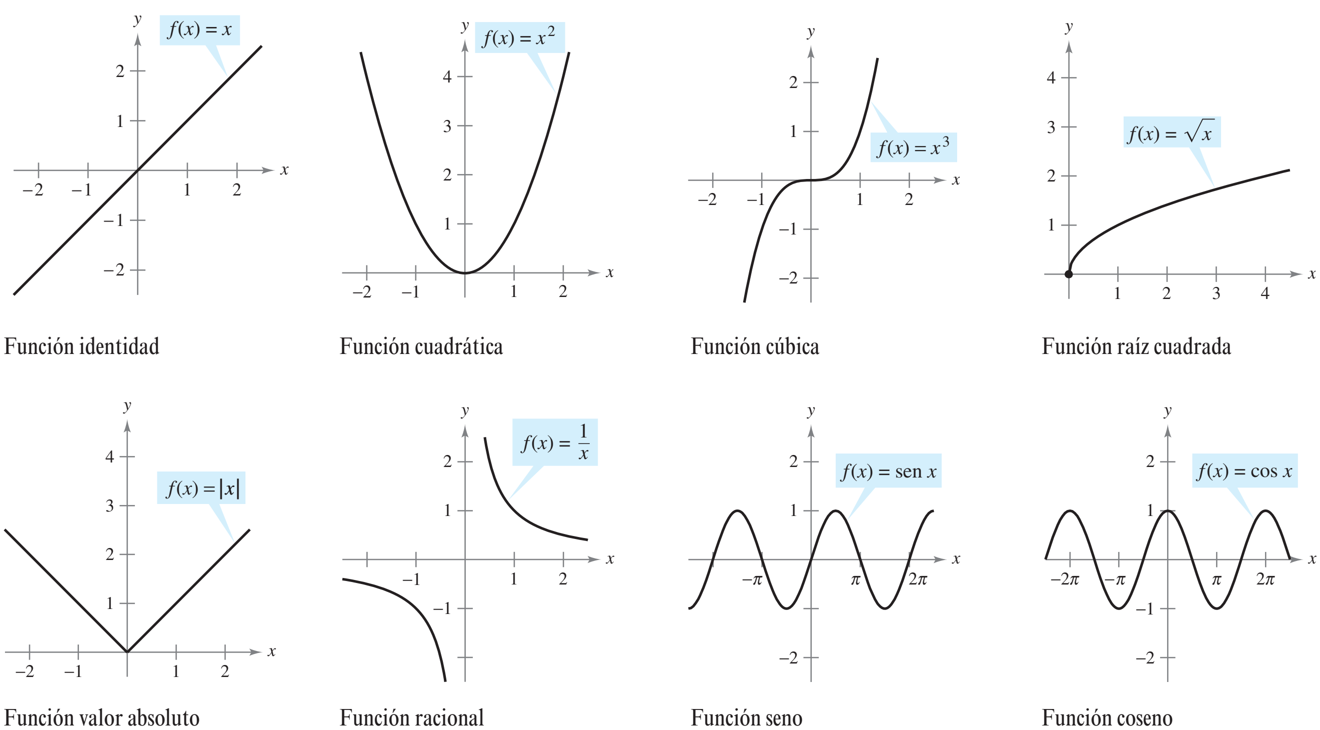
$$x = \text{distancia dirigida desde el eje } y$$
$$f(x) = \text{distancia dirigida desde el eje } x.$$

Una recta vertical puede cortar la gráfica de una función de x como máximo *una vez*. Esta observación proporciona un criterio visual adecuado, llamado **criterio de la recta vertical**, para funciones de x. Es decir, una gráfica en el plano de coordenadas es la gráfica de una función x si y sólo si ninguna recta vertical hace intersección con ella en más de un punto. Por ejemplo, en la figura P.26*a* puede verse que la gráfica no define a y como función de x, ya que hay una recta vertical que corta a la gráfica dos veces, mientras que en las figuras P.26*b* y *c* las gráficas sí definen a y como función de x.



***a*)** No es una función de x ***b*)** Una función de x ***c*)** Una función de x
Figura P.26

En la figura P.27 se muestran las gráficas de ocho funciones básicas, las cuales hay que conocer bien. (Las gráficas de las otras cuatro funciones trigonométricas básicas se encuentran en el apéndice C.)



Gráficas de ocho funciones básicas
Figura P.27