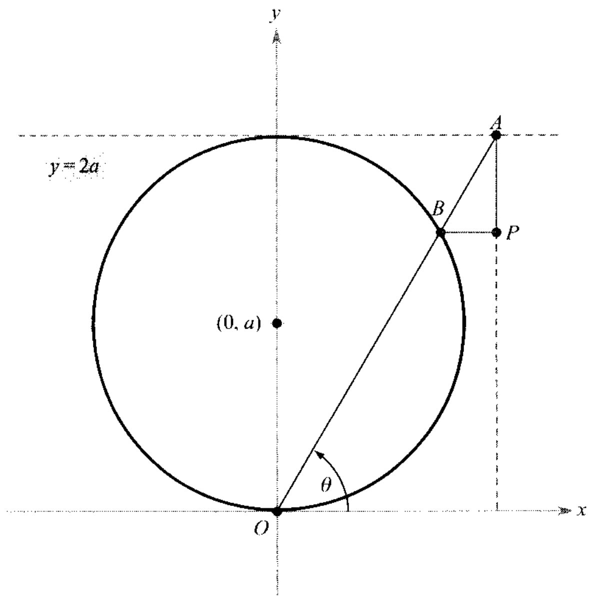


b) Demuestre que el punto B viene descrito por la función vectorial

$$\mathbf{r}_B(\theta) = a \operatorname{sen} 2\theta \mathbf{i} + a(1 - \cos 2\theta)\mathbf{j} \quad 0 < \theta < \pi$$

c) Combine esos dos resultados para hallar una función vectorial $\mathbf{r}(\theta)$ para la hechicera de Agnesi. Represente esta curva en una calculadora.

d) Describa los límites

$$\lim_{\theta \to 0^+} \mathbf{r}(\theta) \qquad \lim_{\theta \to \pi^-} \mathbf{r}(\theta)$$

e) Elimine el parámetro θ y determine la ecuación rectangular de la hechicera de Agnesi. Represente esta función con ayuda de una calculadora para $a = 1$ y compare la gráfica obtenida con la del apartado *c*).

CONTENIDO ▪
Derivación de funciones vectoriales ▪
Integración de funciones vectoriales ▪

11.2 Derivación e integración de funciones vectoriales

Derivación de funciones vectoriales

En las Secciones 11.3-11.5 estudiaremos varias aplicaciones importantes del cálculo con funciones vectoriales. Como preparación para ello, dedicamos esta sección a familiarizarnos con las derivadas e integrales de funciones vectoriales.

La definición de la derivada de una función vectorial imita la de las funciones con valores reales.

DEFINICIÓN DE LA DERIVADA DE UNA FUNCIÓN VECTORIAL

La **derivada de una función vectorial r** se define como

$$\mathbf{r}'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t)}{\Delta t}$$

para todo t en el que el límite exista. Si $\mathbf{r}'(c)$ existe, se dice que **r** es **derivable** en c. Si $\mathbf{r}'(c)$ existe para todo c en un intervalo abierto, se dice que **r** es **derivable** en el intervalo I. La derivabilidad de funciones vectoriales puede extenderse a intervalos cerrados, considerando límites laterales.

Nota. Aparte de $\mathbf{r}'(t)$ se emplean otras notaciones para la derivada de una función vectorial, como

$$D[\mathbf{r}(t)],\ \frac{d}{dt}[\mathbf{r}(t)],\ \text{y}\ \frac{d\mathbf{r}}{dt}$$

La derivación de funciones vectoriales puede efectuarse *componente a componente*. Para convencerse de ello, basta considerar la función $\mathbf{r}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j}$ y aplicar la definición de derivada, con lo que se obtiene

$$\begin{aligned}
\mathbf{r}'(t) &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t)}{\Delta t} \\
&= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t + \Delta t)\mathbf{i} + g(t + \Delta t)\mathbf{j} - f(t)\mathbf{i} - g(t)\mathbf{j}}{\Delta t} \\
&= \lim_{\Delta t \to 0} \left\{ \left[\frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t} \right] \mathbf{i} + \left[\frac{g(t + \Delta t) - g(t)}{\Delta t} \right] \mathbf{j} \right\} \\
&= \left\{ \lim_{\Delta t \to 0} \left[\frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t} \right] \right\} \mathbf{i} + \left\{ \lim_{\Delta t \to 0} \left[\frac{g(t + \Delta t) - g(t)}{\Delta t} \right] \right\} \mathbf{j} \\
&= f'(t)\mathbf{i} + g'(t)\mathbf{j}
\end{aligned}$$

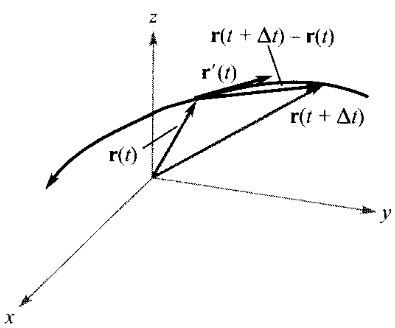


FIGURA 11.8

Este importante resultado queda recogido en el siguiente teorema. Nótese que la derivada de la función vectorial $\mathbf{r}$ es ella misma una función vectorial. Puede verse en la Figura 11.8 que $\mathbf{r}'(t)$ es un vector tangente a la curva dada por $\mathbf{r}(t)$ y que apunta en la dirección de los valores crecientes de t.

TEOREMA 11.1 DERIVACIÓN DE FUNCIONES VECTORIALES

1. **Si $\mathbf{r}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j}$, donde f y g son funciones derivables de t, entonces**

$$\mathbf{r}'(t) = f'(t)\mathbf{i} + g'(t)\mathbf{j} \qquad \text{Plano}$$

2. **Si $\mathbf{r}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j} + h(t)\mathbf{k}$, donde f, g y h son funciones derivables de t, entonces**

$$\mathbf{r}'(t) = f'(t)\mathbf{i} + g'(t)\mathbf{j} + h'(t)\mathbf{k} \qquad \text{Espacio}$$

EJEMPLO 1 Derivación de funciones vectoriales

Hallar la derivada de cada una de las siguientes funciones vectoriales.

a) $\mathbf{r}(t) = t^2\mathbf{i} - 4\mathbf{j}$ *b)* $\mathbf{r}(t) = \dfrac{1}{t}\mathbf{i} + \ln t\mathbf{j} + e^{2t}\mathbf{k}$

Solución: Derivando componente a componente vemos que

a) $\mathbf{r}'(t) = 2t\mathbf{i} - 0\mathbf{j} = 2t\mathbf{i}$.

b) $\mathbf{r}'(t) = -\dfrac{1}{t^2}\mathbf{i} + \dfrac{1}{t}\mathbf{j} + 2e^{2t}\mathbf{k}$ □

Las derivadas de orden superior de una función vectorial se obtienen aplicando derivadas sucesivas a las funciones componentes.

EJEMPLO 2 Derivadas de orden superior

Para la función vectorial hallar $\mathbf{r}(t) = \cos t\mathbf{i} + \operatorname{sen} t\mathbf{j} + 2t\mathbf{k}$.

a) $\mathbf{r}'(t)$ *b)* $\mathbf{r}''(t)$ *c)* $\mathbf{r}'(t) \cdot \mathbf{r}''(t)$ *d)* $\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)$

Solución:

a) $\mathbf{r}'(t) = -\operatorname{sen} t\,\mathbf{i} + \cos t\,\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$

b) $\mathbf{r}''(t) = -\cos t\,\mathbf{i} - \operatorname{sen} t\,\mathbf{j} + 0\mathbf{k} = -\cos t\,\mathbf{i} - \operatorname{sen} t\,\mathbf{j}$

c) $\mathbf{r}'(t) \cdot \mathbf{r}''(t) = \operatorname{sen} t \cos t - \operatorname{sen} t \cos t = 0$

d)
$$\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -\operatorname{sen} t & \cos t & 2 \\ -\cos t & -\operatorname{sen} t & 0 \end{vmatrix}$$
$$= \begin{vmatrix} \cos t & 2 \\ -\operatorname{sen} t & 0 \end{vmatrix}\mathbf{i} - \begin{vmatrix} -\operatorname{sen} t & 2 \\ -\cos t & 0 \end{vmatrix}\mathbf{j} + \begin{vmatrix} -\operatorname{sen} t & \cos t \\ -\cos t & -\operatorname{sen} t \end{vmatrix}\mathbf{k}$$
$$= 2 \operatorname{sen} t\mathbf{i} - 2 \cos t\mathbf{j} + \mathbf{k}$$

Hacemos notar que el producto escalar en el apartado *c)* es una función de valores reales, no una función vectorial. □

La parametrización de la curva representada por la función vectorial

$$\mathbf{r}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j} + h(t)\mathbf{k}$$

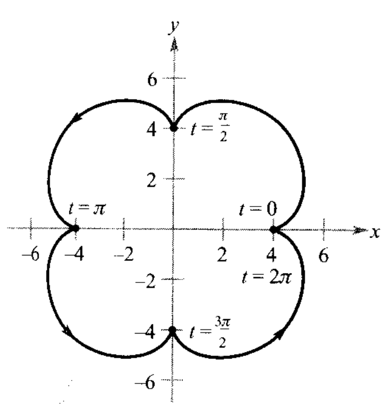
es **suave en un intervalo abierto *I*** si f', g' y h' son continuas en I y además para todos los valores de t en el intervalo I.

EJEMPLO 3 Intervalos en los que una curva es suave

Hallar los intervalos en los que la epicicloide C, dada por

$$\mathbf{r}(t) = (5 \cos t - \cos 5t)\mathbf{i} + (5 \operatorname{sen} t - \operatorname{sen} 5t)\mathbf{j},\ 0 \leqslant t \leqslant 2\pi$$

es suave.



$\mathbf{r}(t) = (5 \cos t - \cos 5t)\mathbf{i} + (5 \operatorname{sen} t - \operatorname{sen} 5t)\mathbf{j}$

FIGURA 11.9
La epicicloide deja de ser suave en los puntos de intersección con los ejes.

Solución: La derivada de $\mathbf{r}$ es

$$\mathbf{r}'(t) = (-5 \operatorname{sen} t + 5 \operatorname{sen} 5t)\mathbf{i} + (5 \cos t - 5 \cos 5t)\mathbf{j}$$

En el intervalo $[0, 2\pi]$, los únicos valores de t para los que $\mathbf{r}'(t) = 0\mathbf{i} + 0\mathbf{j}$ son $t = 0, \pi/2, \pi, 3\pi/2$, y 2π. Por tanto, concluimos que C es suave en los intervalos

$$\left(0, \frac{\pi}{2}\right), \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right), \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right), \text{ y } \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$$

como muestra la Figura 11.9. □

| Nota. Nótese en la Figura 11.9 que la curva deja de ser suave en los puntos donde tiene un cambio brusco de dirección. Tales puntos se llaman **cúspides** o **nodos**.

La mayor parte de las reglas de derivación de funciones con valores reales tienen su contrapartida para las funciones vectoriales. Algunas de ellas se recogen en el próximo teorema. Hay que hacer notar que el teorema contiene tres versiones de «reglas del producto». La propiedad 3 da la derivada del producto de una función de valores reales por una función vectorial. La propiedad 4 da la derivada del producto escalar de dos funciones vectoriales, y la propiedad 5 la derivada del producto vectorial de dos funciones vectoriales (en el espacio). (La propiedad 5 se aplica sólo a funciones vectoriales en tres dimensiones, ya que el producto vectorial no está definido para vectores en dos dimensiones.)

TEOREMA 11.2 PROPIEDADES DE LA DERIVADA

Sean $\mathbf{r}$ y $\mathbf{u}$ funciones vectoriales de t, f una función derivable de t con valores reales, y c un escalar.

1. $D_t\,[c\mathbf{r}(t)] = c\mathbf{r}'(t)$
2. $D_t\,[\mathbf{r}(t) \pm \mathbf{u}(t)] = \mathbf{r}'(t) \pm \mathbf{u}'(t)$
3. $D_t\,[f(t)\mathbf{r}(t)] = f(t)\mathbf{r}'(t) + f'(t)\mathbf{r}(t)$
4. $D_t\,[\mathbf{r}(t) \cdot \mathbf{u}(t)] = \mathbf{r}(t) \cdot \mathbf{u}'(t) + \mathbf{r}'(t) \cdot \mathbf{u}(t)$
5. $D_t\,[\mathbf{r}(t) \times \mathbf{u}(t)] = \mathbf{r}(t) \times \mathbf{u}'(t) + \mathbf{r}'(t) \times \mathbf{u}(t)$
6. $D_t\,[\mathbf{r}(f(t))] = \mathbf{r}'(f(t))f'(t)$
7. Si $\mathbf{r}(t) \cdot \mathbf{r}(t) = c$, entonces $\mathbf{r}(t) \cdot \mathbf{r}'(t) = 0$

Demostración: Para probar la propiedad 4, escribamos

$$\mathbf{r}(t) = f_1(t)\mathbf{i} + g_1(t)\mathbf{j} \quad \text{y} \quad \mathbf{u}(t) = f_2(t)\mathbf{i} + g_2(t)\mathbf{j}$$

donde f_1 y g_1 son funciones derivables de t. Entonces,

$$\mathbf{r}(t) \cdot \mathbf{u}(t) = f_1(t)f_2(t) + g_1(t)g_2(t)$$

y se sigue que

$$\begin{aligned} D_t[\mathbf{r}(t) \cdot \mathbf{u}(t)] &= f_1(t)f_2'(t) + f_1'(t)f_2(t) + g_1(t)g_2'(t) + g_1'(t)g_2(t) \\ &= [f_1(t)f_2'(t) + g_1(t)g_2'(t)] + [f_1'(t)f_2(t) + g_1'(t)g_2(t)] \\ &= \mathbf{r}(t) \cdot \mathbf{u}'(t) + \mathbf{r}'(t) \cdot \mathbf{u}(t) \end{aligned}$$

Dejamos como ejercicios las demostraciones de las propiedades restantes (véanse Ejercicios 55-59 y Ejercicio 62). □

EXPLORACIÓN

Sea $\mathbf{r}(t) = \cos t\mathbf{i} + \operatorname{sen} t\mathbf{j}$. Dibuje su gráfica. Explique por qué es un círculo de radio 1 centrado en el origen. Calcule $\mathbf{r}(\pi/4)$ y $\mathbf{r}'(\pi/4)$. Coloque el vector $\mathbf{r}'(\pi/4)$ con su punto inicial coincidiendo con el punto final de $\mathbf{r}(\pi/4)$. ¿Qué observa? Demuestre que $\mathbf{r}(t) \cdot \mathbf{r}(t)$ es constante y que $\mathbf{r}(t) \cdot \mathbf{r}'(t) = 0$ para todo t. ¿Qué relación tiene este ejemplo con la propiedad 7 del Teorema 11.2?

EJEMPLO 4 Usando las propiedades de la derivada

Dadas las funciones vectoriales

$$\mathbf{r}(t) = \frac{1}{t}\mathbf{i} - \mathbf{j} + (\ln t)\mathbf{k} \quad \text{y} \quad \mathbf{u}(t) = t^2\mathbf{i} - 2t\mathbf{j} + \mathbf{k}$$

calcular

a) $D_t[\mathbf{r}(t) \cdot \mathbf{u}(t)]$ y *b)* $D_t[\mathbf{u}(t) \times \mathbf{u}'(t)]$

Solución:

a) De $\mathbf{r}'(t) = -\frac{1}{t^2}\mathbf{i} + \frac{1}{t}\mathbf{k}$ y $\mathbf{u}'(t) = 2t\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$, se sigue que

$$\begin{aligned}
D_t[\mathbf{r}(t) \cdot \mathbf{u}(t)] &= \mathbf{r}(t) \cdot \mathbf{u}'(t) + \mathbf{r}'(t) \cdot \mathbf{u}(t) \\
&= \left(\frac{1}{t}\mathbf{i} - \mathbf{j} + \ln t\mathbf{k}\right) \cdot (2t\mathbf{i} - 2\mathbf{j}) \\
&\quad + \left(-\frac{1}{t^2}\mathbf{i} + \frac{1}{t}\mathbf{k}\right) \cdot (t^2\mathbf{i} - 2t\mathbf{j} + \mathbf{k}) \\
&= 2 + 2 + (-1) + \frac{1}{t} \\
&= 3 + \frac{1}{t}
\end{aligned}$$

b) De $\mathbf{u}'(t) = 2t\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$ y $\mathbf{u}''(t) = 2\mathbf{i}$, deducimos que

$$\begin{aligned}
D_t[\mathbf{u}(t) \times \mathbf{u}'(t)] &= [\mathbf{u}(t) \times \mathbf{u}''(t)] + [\mathbf{u}'(t) \times \mathbf{u}'(t)] \\
&= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ t^2 & -2t & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} + \mathbf{0} \\
&= \begin{vmatrix} -2t & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}\mathbf{i} - \begin{vmatrix} t^2 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}\mathbf{j} + \begin{vmatrix} t^2 & -2t \\ 2 & 0 \end{vmatrix}\mathbf{k} \\
&= 0\mathbf{i} - (-2)\mathbf{j} + 4t\mathbf{k} \\
&= 2\mathbf{j} + 4t\mathbf{k}
\end{aligned}$$

□

Nota. Intente rehacer los apartados *a)* y *b)* efectuando en primer lugar los productos, escalar y vectorial, y derivando después, para comprobar que se llega al mismo resultado.

Integración de funciones vectoriales

La siguiente definición es una consecuencia lógica de la definición de derivada de una función vectorial.

DEFINICIÓN DE LA INTEGRAL DE UNA FUNCIÓN VECTORIAL

1. Si $\mathbf{r}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j}$, donde f y g son funciones continuas en $[a, b]$, la **integral indefinida** (o **antiderivada**) de $\mathbf{r}$ es

$$\int \mathbf{r}(t)\,dt = \left[\int f(t)\,dt\right]\mathbf{i} + \left[\int g(t)\,dt\right]\mathbf{j} \qquad \text{Plano}$$

y su **integral definida** sobre el intervalo $a \leqslant t \leqslant b$ es

$$\int_a^b \mathbf{r}(t)\,dt = \left[\int_a^b f(t)\,dt\right]\mathbf{i} + \left[\int_a^b g(t)\,dt\right]\mathbf{j}$$

2. Si $\mathbf{r}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j} + h(t)\mathbf{k}$, donde f, g y h son funciones continuas en $[a, b]$, la **integral indefinida** (o **antiderivada**) de $\mathbf{r}$ es

$$\int \mathbf{r}(t)\,dt = \left[\int f(t)\,dt\right]\mathbf{i} + \left[\int g(t)\,dt\right]\mathbf{j} + \left[\int h(t)\,dt\right]\mathbf{k} \qquad \text{Espacio}$$

y su **integral definida** sobre el intervalo $a \leqslant t \leqslant b$ es

$$\int_a^b \mathbf{r}(t)\,dt = \left[\int_a^b f(t)\,dt\right]\mathbf{i} + \left[\int_a^b g(t)\,dt\right]\mathbf{j} + \left[\int_a^b h(t)\,dt\right]\mathbf{k}$$

La integral indefinida de una función vectorial $\mathbf{r}(t)$ es una familia de funciones vectoriales (las **primitivas** de $\mathbf{r}$) que difieren unas de otras en un vector constante $\mathbf{C}$. Por ejemplo, si $\mathbf{r}(t)$ es una función vectorial tridimensional, entonces al hallar su integral indefinida $\int \mathbf{r}(t)\,dt$, obtenemos tres constantes de integración

$$\int f(t)\,dt = F(t) + C_1, \qquad \int g(t)\,dt = G(t) + C_2, \qquad \int h(t)\,dt = H(t) + C_3$$

donde $F'(t) = f(t)$, $G'(t) = g(t)$, y $H'(t) = h(t)$. Estas tres constantes *escalares* configuran un *vector* constante de integración:

$$\begin{aligned}\int \mathbf{r}(t)\,dt &= [F(t) + C_1]\mathbf{i} + [G(t) + C_2]\mathbf{j} + [H(t) + C_3]\mathbf{k}\\ &= [F(t)\mathbf{i} + G(t)\mathbf{j} + H(t)\mathbf{k}] + [C_1\mathbf{i} + C_2\mathbf{j} + C_3\mathbf{k}]\\ &= \mathbf{R}(t) + \mathbf{C}\end{aligned}$$

donde $\mathbf{R}'(t) = f(t)$.

EJEMPLO 5 Integral de una función vectorial

Hallar la integral indefinida

$$\int (t\mathbf{i} + 3\mathbf{j})\,dt$$

Solución: Integrando componente a componente es fácil ver que

$$\int (t\mathbf{i} + 3\mathbf{j})\, dt = \frac{t^2}{2}\mathbf{i} + 3t\mathbf{j} + \mathbf{C} \qquad \square$$

El Ejemplo 6 enseña cómo calcular la integral definida de una función vectorial.

EJEMPLO 6 Integral definida de una función vectorial

Calcular la integral

$$\int_0^1 \mathbf{r}(t)\, dt = \int_0^1 \left(\sqrt[3]{t}\,\mathbf{i} + \frac{1}{t+1}\mathbf{j} + e^{-t}\mathbf{k}\right) dt$$

Solución:

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \mathbf{r}(t)\, dt &= \left(\int_0^1 t^{1/3}\, dt\right)\mathbf{i} + \left(\int_0^1 \frac{1}{t+1}\, dt\right)\mathbf{j} + \left(\int_0^1 e^{-t}\, dt\right)\mathbf{k} \\
&= \left[\left(\frac{3}{4}\right)t^{4/3}\right]_0^1 \mathbf{i} + \Big[\ln|t+1|\Big]_0^1 \mathbf{j} + \Big[-e^{-t}\Big]_0^1 \mathbf{k} \\
&= \frac{3}{4}\mathbf{i} + (\ln 2)\mathbf{j} + \left(1 - \frac{1}{e}\right)\mathbf{k} \qquad \square
\end{aligned}$$

Tal como ocurría para funciones con valores reales, podemos aislar una sola primitiva de entre la familia de funciones vectoriales que constituye la integral indefinida de una función vectorial $\mathbf{r}'$, sin más que imponer una condición inicial, como ilustra el ejemplo que sigue.

EJEMPLO 7 Una primitiva particular de una función vectorial

Hallar la primitiva de

$$\mathbf{r}'(t) = \cos 2t\mathbf{i} - 2 \operatorname{sen} t\mathbf{j} + \frac{1}{1+t^2}\mathbf{k}$$

que satisface la condición inicial $\mathbf{r}(0) = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$

Solución:

$$\begin{aligned}
\mathbf{r}(t) &= \int \mathbf{r}'(t)\, dt \\
&= \left(\int \cos 2t\, dt\right)\mathbf{i} + \left(\int -2 \operatorname{sen} t\, dt\right)\mathbf{j} + \left(\int \frac{1}{1+t^2}\, dt\right)\mathbf{k} \\
&= \left(\frac{1}{2}\operatorname{sen} 2t + C_1\right)\mathbf{i} + (2\cos t + C_2)\mathbf{j} + (\operatorname{arctg} t + C_3)\mathbf{k}
\end{aligned}$$

Haciendo $t = 0$ y usando el hecho de que $\mathbf{r}(0) = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$, vemos que

$$\begin{aligned}\mathbf{r}(0) &= (0 + C_1)\mathbf{i} + (2 + C_2)\mathbf{j} + (0 + C_3)\mathbf{k}\\ &= 3\mathbf{i} + (-2)\mathbf{j} + \mathbf{k}\end{aligned}$$

Igualando las componentes correspondientes, obtenemos

$$C_1 = 3, \quad 2 + C_2 = -2, \quad \text{y} \quad C_3 = 1$$

Así pues, la primitiva que cumple la condición inicial requerida es

$$\mathbf{r}(t) = \left(\frac{1}{2}\,\text{sen}\,2t + 3\right)\mathbf{i} + (2\cos t - 4)\mathbf{j} + (\text{arctg}\,t + 1)\mathbf{k} \qquad \square$$

Ejercicios de la Sección 11.2

En los Ejercicios 1-4, *a*) dibujar la curva plana dada por la función vectorial, y *b*) dibujar los vectores $\mathbf{r}(t_0)$ y $\mathbf{r}'(t_0)$ para el valor de t_0 que se especifica. Colocar los vectores de manera que el punto inicial de $\mathbf{r}(t_0)$ esté en el origen y el punto inicial de $\mathbf{r}'(t_0)$ coincida con el punto final de $\mathbf{r}(t_0)$. ¿Qué relación hay entre $\mathbf{r}'(t_0)$ y la curva?

1. $\mathbf{r}(t) = t^2\mathbf{i} + t\mathbf{j}$ $\quad t_0 = 2$

2. $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t^3\mathbf{j}$ $\quad t_0 = 1$

3. $\mathbf{r}(t) = \cos t\mathbf{i} + \text{sen}\,t\mathbf{j}$ $\quad t_0 = \dfrac{\pi}{2}$

4. $\mathbf{r}(t) = t^2\mathbf{i} + \dfrac{1}{t}\mathbf{j}$ $\quad t_0 = 2$

5. ***Investigación*** Consideremos la función vectorial

$$\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j}$$

a) Dibujar un esbozo de su gráfica y comprobarlo con la calculadora.
b) Dibujar los vectores $\mathbf{r}(1/4)$, $\mathbf{r}(1/2)$ y $\mathbf{r}(1/2) - \mathbf{r}(1/4)$ en la gráfica del apartado *a*).
c) Comparar el vector $\mathbf{r}'(1/4)$ con el vector

$$\frac{\mathbf{r}(1/2) - \mathbf{r}(1/4)}{1/2 - 1/4}$$

6. ***Investigación*** Consideremos la función vectorial

$$\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + (4 - t^2)\mathbf{j}$$

a) Dibujar un esbozo de su gráfica y comprobarlo con la calculadora.
b) Dibujar los vectores $\mathbf{r}(1)$, $\mathbf{r}(1{,}25)$, y $\mathbf{r}(1{,}25) - \mathbf{r}(1)$ en la gráfica del apartado *a*).
c) Comparar el vector $\mathbf{r}'(1)$ con el vector

$$\frac{\mathbf{r}(1{,}25) - \mathbf{r}(1)}{1{,}25 - 1}$$

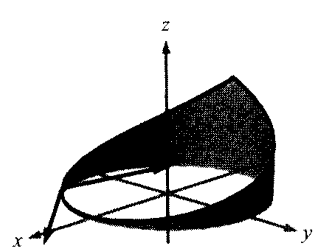
En los Ejercicios 7 y 8, *a*) dibujar la curva espacial dada por la función vectorial, y *b*) dibujar los vectores $\mathbf{r}(t_0)$ y $\mathbf{r}'(t_0)$ para el valor indicado de t_0.

7. $\mathbf{r}(t) = 2\cos t\mathbf{i} + 2\,\text{sen}\,t\mathbf{j} + t\mathbf{k}$ $\quad t_0 = \dfrac{3\pi}{2}$

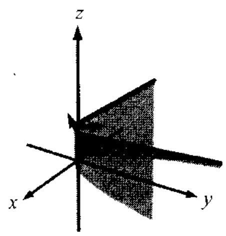
8. $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + \dfrac{3}{2}\mathbf{k}$ $\quad t_0 = 2$

En los Ejercicios 9 y 10, se dan una función vectorial y su gráfica. La gráfica muestra además los vectores unitarios $\mathbf{r}'(t_0)/\|\mathbf{r}'(t_0)\|$ y $\mathbf{r}''(t_0)/\|\mathbf{r}''(t_0)\|$. Hallar estos dos vectores e identificarlos en la gráfica.

9. $\mathbf{r}(t) = \cos(\pi t)\mathbf{i} + \text{sen}(\pi t)\mathbf{j} + t^2\mathbf{k}$ $\quad t_0 = -\dfrac{1}{4}$



10. $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + e^{0.75t}\,\mathbf{k}$ $\qquad t_0 = \dfrac{1}{4}$



En los Ejercicios 11-18, hallar $\mathbf{r}'(t)$

11. $\mathbf{r}(t) = 6t\mathbf{i} - 7t^2\mathbf{j} + t^3\mathbf{k}$

12. $\mathbf{r}(t) = \dfrac{1}{t}\mathbf{i} + 16t\mathbf{j} + \dfrac{t^2}{2}\mathbf{k}$

13. $\mathbf{r}(t) = a\cos^3 t\mathbf{i} + a\,\mathrm{sen}^3\, t\mathbf{j} + \mathbf{k}$

14. $\mathbf{r}(t) = \sqrt{t}\mathbf{i} + t\sqrt{t}\mathbf{j} + \ln t\mathbf{k}$

15. $\mathbf{r}(t) = e^{-t}\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$

16. $\mathbf{r}(t) = \langle \mathrm{sen}\, t - t\cos t,\ \cos t + t\,\mathrm{sen}\, t,\ t^2 \rangle$

17. $\mathbf{r}(t) = \langle t\,\mathrm{sen}\, t,\ \cos t,\ t \rangle$

18. $\mathbf{r}(t) = \langle \mathrm{arcsen}\, t,\ \mathrm{arccos}\, t,\ 0 \rangle$

En los Ejercicios 19 y 20, hallar

a) $\mathbf{r}'(t)$ *b)* $\mathbf{r}''(t)$
c) $D_t[\mathbf{r}(t)\cdot\mathbf{u}(t)]$ *d)* $D_t[3\mathbf{r}(t) - \mathbf{u}(t)]$
e) $D_t[\mathbf{r}(t)\times\mathbf{u}(t)]$ *f)* $D_t[\|\mathbf{r}(t)\|]$, $t > 0$

19. $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + 3t\mathbf{j} + t^2\mathbf{k}$, $\quad \mathbf{u}(t) = 4t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + t^3\mathbf{k}$

20. $\mathbf{r}(t) = t^2\mathbf{i} + \mathrm{sen}\, t\mathbf{j} + \cos t\mathbf{k}$, $\quad \mathbf{u}(t) = \dfrac{1}{t^2}\mathbf{i} + \mathrm{sen}\, t\mathbf{j} + \cos t\mathbf{k}$

En los Ejercicios 21 y 22, determinar θ en función de t, el ángulo θ entre $\mathbf{r}(t)$ y $\mathbf{r}'(t)$. Representar en la calculadora $\theta(t)$ y usar la gráfica para hallar los extremos de esa función. Hallar los valores de t para los que esos dos vectores son perpendiculares.

21. $\mathbf{r}(t) = 3\,\mathrm{sen}\, t\mathbf{i} + 4\cos t\mathbf{j}$

22. $\mathbf{r}(t) = t^2\mathbf{i} + t\mathbf{j}$

En los Ejercicios 23-32, hallar el intervalo o intervalos en los que la curva dada por la función vectorial es suave.

23. $\mathbf{r}(t) = t^2\mathbf{i} + t^3\mathbf{j}$

24. $\mathbf{r}(t) = \dfrac{1}{t-1}\mathbf{i} + 3t\mathbf{j}$

25. $\mathbf{r}(\theta) = 2\cos^3\theta\mathbf{i} + 3\,\mathrm{sen}^3\,\theta\mathbf{j}$

26. $\mathbf{r}(\theta) = (\theta + \mathrm{sen}\,\theta)\mathbf{i} + (1 - \cos\theta)\mathbf{j}$

27. $\mathbf{r}(\theta) = (\theta - 2\,\mathrm{sen}\,\theta)\mathbf{i} + (1 - 2\cos\theta)\mathbf{j}$

28. $\mathbf{r}(t) = \dfrac{3t}{1+t^3}\mathbf{i} + \dfrac{3t^2}{1+t^3}\mathbf{j}$

29. $\mathbf{r}(t) = (t-1)\mathbf{i} + \dfrac{1}{t}\mathbf{j} - t^2\mathbf{k}$

30. $\mathbf{r}(t) = e^t\mathbf{i} - e^{-t}\mathbf{j} + 3t\mathbf{k}$

31. $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} - 3t\mathbf{j} + \mathrm{tg}\, t\mathbf{k}$

32. $\mathbf{r}(t) = \sqrt{t}\mathbf{i} + (t^2 - 1)\mathbf{j} + \dfrac{1}{4}t\mathbf{k}$

En los Ejercicios 33 y 34, usar la definición de derivada para hallar $\mathbf{r}'(t)$

33. $\mathbf{r}(t) = (3t + 2)\mathbf{i} + (1 - t^2)\mathbf{j}$

34. $\mathbf{r}(t) = \sqrt{t}\mathbf{i} + \dfrac{3}{t}\mathbf{j} - 2t\mathbf{k}$

35. ***Redacción*** Las tres componentes de la derivada de una función vectorial **u** son positivas en $t = t_0$. Describir el comportamiento de **u** en $t = t_0$.

36. ***Redacción*** La componente z de la derivada de una función vectorial **u** es 0 para todo t en el dominio de la función. ¿Qué implica este hecho sobre la gráfica de **u**?

En los Ejercicios 37-44, evaluar la integral indefinida.

37. $\displaystyle\int (2t\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k})\,dt$

38. $\displaystyle\int (3t^2\mathbf{i} + 4t\mathbf{j} - 8t^3\mathbf{k})\,dt$

39. $\displaystyle\int \left(\frac{1}{t}\mathbf{i} + \mathbf{j} - t^{3/2}\mathbf{k}\right)dt$

40. $\displaystyle\int \left(\ln t\mathbf{i} + \frac{1}{t}\mathbf{j} + \mathbf{k}\right)dt$

41. $\displaystyle\int \left[(2t-1)\mathbf{i} + 4t^3\mathbf{j} + 3\sqrt{t}\mathbf{k}\right]dt$

42. $\displaystyle\int (e^t\mathbf{i} + \mathrm{sen}\, t\mathbf{j} + \cos t\mathbf{k})\,dt$

43. $\displaystyle\int \left(\sec^2 t\mathbf{i} + \frac{1}{1+t^2}\mathbf{j}\right)dt$

44. $\displaystyle\int (e^{-t}\,\mathrm{sen}\, t\mathbf{i} + e^{-t}\cos t\mathbf{j})\,dt$

En los Ejercicios 45-50, hallar $\mathbf{r}(t)$ con las condiciones que se indican.