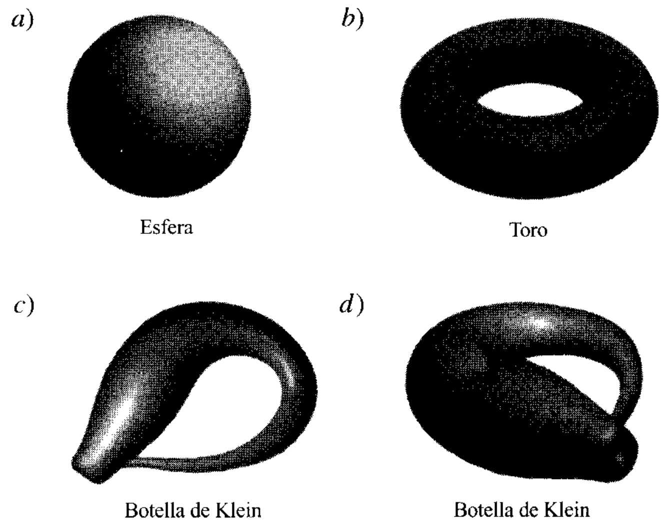
a) Usar este modelo para aproximar z en los valores dados de x e y.
b) Representar en una calculadora el modelo para $5 \leqslant x \leqslant 22$ y $25 \leqslant y \leqslant 125$.
c) Determinar la concavidad de las trazas paralelas al plano xz. Interpretar el resultado en el contexto del problema.
d) Determinar la concavidad de las trazas paralelas al plano yz. Interpretar el resultado en el contexto del problema.

59. Determinar la intersección del paraboloide hiperbólico $z = y^2/b^2 - x^2/a^2$ con el plano $bx + ay - z = 0$. (Supóngase a, $b > 0$.)

60. ***Para pensar*** La figura muestra tres tipos de superficies «topológicas» clásicas. La esfera y el toro tienen ambas «interior» y «exterior». ¿Los tiene también la botella de Klein? Explicar la respuesta.



CONTENIDO ▪
Coordenadas cilíndricas ▪
Coordenadas esféricas ▪

10.7 Coordenadas cilíndricas y esféricas

Coordenadas cilíndricas

Ya hemos tenido ocasión de comprobar que ciertas gráficas bidimensionales son más fáciles de representar en coordenadas polares que en coordenadas rectangulares. Lo mismo ocurre con las superficies. En esta sección introducimos dos sistemas alternativos de coordenadas para el espacio. El primero, el sistema de coordenadas cilíndricas, es una generalización de las coordenadas polares al espacio.

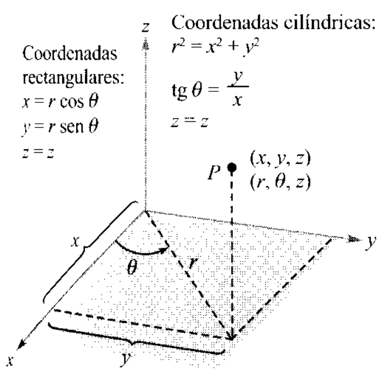


FIGURA 10.66

EL SISTEMA DE COORDENADAS CILÍNDRICAS

En un sistema de coordenadas cilíndricas, un punto P del espacio se representa por un trío ordenado (r, θ, z).

1. **(r, θ) son las coordenadas polares de la proyección de P sobre el plano xy.**
2. **z es la distancia dirigida de P a (r, θ).**

Para pasar de rectangulares a cilíndricas, o viceversa, hay que usar las siguientes fórmulas de conversión (véase Figura 10.66).

Cilíndricas a rectangulares:

$$\boxed{x = r\cos\theta, \qquad y = r\,\mathrm{sen}\,\theta, \qquad z = z}$$

Rectangulares a cilíndricas:

$$r^2 = x^2 + y^2, \qquad \text{tg}\ \theta = \frac{y}{x}, \qquad z = z$$

El punto (0, 0, 0) se llama el **polo**. Además, como la representación de un punto en polares no es única, tampoco lo es en cilíndricas.

EJEMPLO 1 Cambio de coordenadas cilíndricas a rectangulares

Expresar en coordenadas rectangulares el punto $(r, \theta, z) = (4, 5\pi/6, 3)$.

Solución: Con las fórmulas de conversión de *cilíndricas a rectangulares* obtenemos

$$x = 4\cos\frac{5\pi}{6} = 4\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -2\sqrt{3}$$

$$y = 4\ \text{sen}\ \frac{5\pi}{6} = 4\left(\frac{1}{2}\right) = 2$$

$$z = 3$$

Así pues, en coordenadas rectangulares ese punto es $(x, y, z) = (-2\sqrt{3}, 2, 3)$, como ilustra la Figura 10.67. □

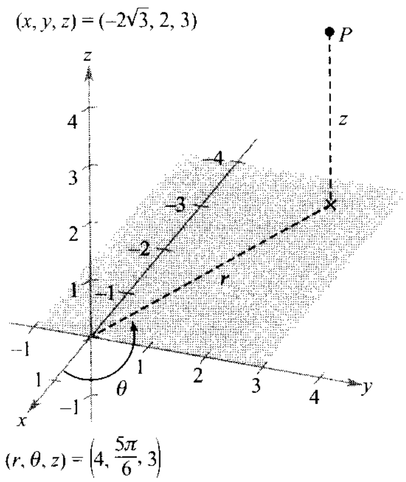


FIGURA 10.67

EJEMPLO 2 Cambio de coordenadas rectangulares a cilíndricas

Expresar el punto $(x, y, z) = (1, \sqrt{3}, 2)$ en coordenadas cilíndricas.

Solución: Con las fórmulas de conversión de *rectangulares a cilíndricas* obtenemos

$$r = \pm\sqrt{1 + 3} = \pm 2$$

$$\text{tg}\ \theta = \sqrt{3} \quad \Longrightarrow \quad \theta = \text{arctg}\ (\sqrt{3}) + n\pi = \frac{\pi}{3} + n\pi$$

$$z = 2$$

Tenemos dos elecciones para r e infinitas para θ. Como indica la Figura 10.68, dos representaciones convenientes del punto son

$$\left(2, \frac{\pi}{3}, 2\right) \qquad r > 0 \text{ y } \theta \text{ en el cuadrante I}$$

$$\left(-2, \frac{4\pi}{3}, 2\right) \qquad r < 0 \text{ y } \theta \text{ en el cuadrante III}$$

□

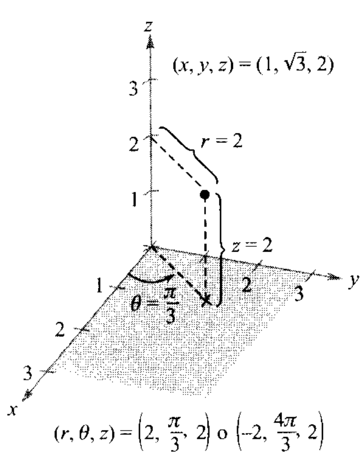


FIGURA 10.68

Las coordenadas cilíndricas son especialmente adecuadas al representar superficies cilíndricas y superficies de revolución con el eje z como eje de simetría (Figura 10.69).

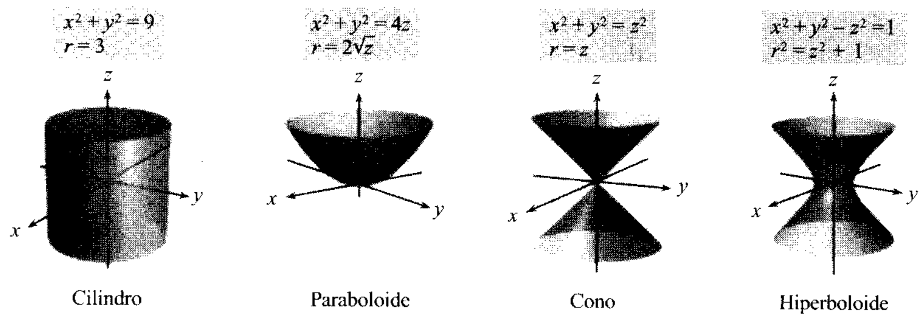


FIGURA 10.69

Los planos verticales que contienen al eje z y los planos horizontales tienen asimismo ecuaciones simples en coordenadas ciilíndricas, como muestra la Figura 10.70.

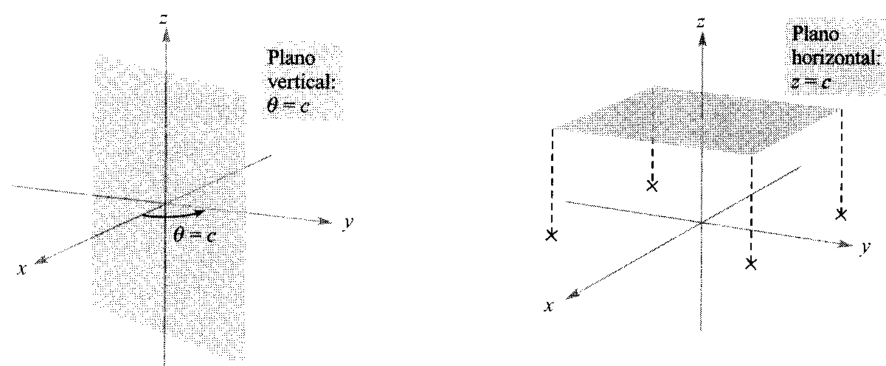


FIGURA 10.70

EJEMPLO 3 Conversión de rectangulares a cilíndricas

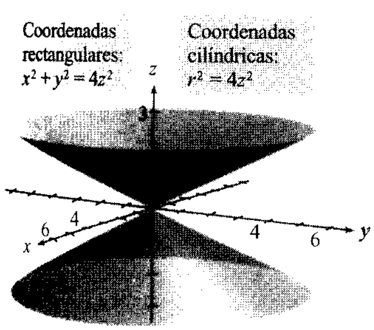


FIGURA 10.71

Hallar ecuaciones en coordenadas cilíndricas para las superficies cuyas ecuaciones rectangulares se especifican a continuación.

a) $x^2 + y^2 = 4z^2$

b) $y^2 = x$

Solución:

a) Por la sección precedente sabemos que la gráfica de $x^2 + y^2 = 4z^2$ es un cono «de dos hojas» con su eje en el eje z (Figura 10.71). Si sustituimos $x^2 + y^2$ por r^2, obtenemos su ecuación en cilíndricas

$$x^2 + y^2 = 4z^2 \qquad \text{Ecuación en coordenadas rectangulares}$$

$$r^2 = 4z^2 \qquad \text{Ecuación en coordenadas cilíndricas}$$

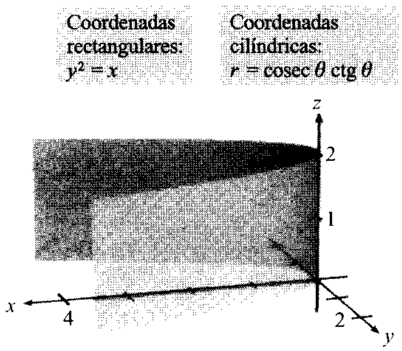


FIGURA 10.72

b) La superficie $y^2 = x$ es un cilindro parabólico con generatrices paralelas al eje z (Figura 10.72). Sustituyendo y^2 por $r^2 \operatorname{sen}^2 \theta$ y x por $r \cos \theta$, obtenemos

$$\begin{aligned} y^2 &= x && \text{Ecuación rectangular} \\ r^2 \operatorname{sen}^2 \theta &= r \cos \theta && \text{Sustituir } y \text{ por } r \operatorname{sen} \theta,\ x \text{ por } r \cos \theta \\ r(r \operatorname{sen}^2 \theta - \cos \theta) &= 0 && \text{Agrupar términos y factorizar} \\ r \operatorname{sen}^2 \theta - \cos \theta &= 0 && \text{Dividir los dos miembros por } r \\ r &= \frac{\cos \theta}{\operatorname{sen}^2 \theta} && \text{Despejar } r \\ r &= \operatorname{cosec} \theta \operatorname{ctg} \theta && \text{Ecuación en cilíndricas} \end{aligned}$$

Nótese que esta ecuación incluye un punto con $r = 0$, así que no se ha perdido nada al dividir ambos miembros por el factor r. □

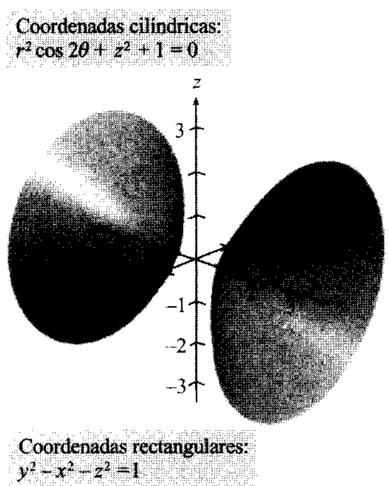


FIGURA 10.73

EJEMPLO 4 Conversión de cilíndricas a rectangulares

Hallar la ecuación en coordenadas rectangulares de la gráfica determinada por la ecuación en cilíndricas

$$r^2 \cos 2\theta + z^2 + 1 = 0$$

Solución:

$$\begin{aligned} r^2 \cos 2\theta + z^2 + 1 &= 0 && \text{Ecuación en cilíndricas} \\ r^2(\cos^2 \theta - \operatorname{sen}^2 \theta) + z^2 + 1 &= 0 && \text{Identidad trigonométrica} \\ r^2 \cos^2 \theta - r^2 \operatorname{sen}^2 \theta + z^2 &= -1 && \\ x^2 - y^2 + z^2 &= -1 && \text{Sustituir } r \cos \theta \text{ por } x \text{ y } r \operatorname{sen} \theta \text{ por } y \\ y^2 - x^2 - z^2 &= 1 && \text{Ecuación rectangular} \end{aligned}$$

Es un hiperboloide de dos hojas cuyo eje es el eje y (Figura 10.73). □

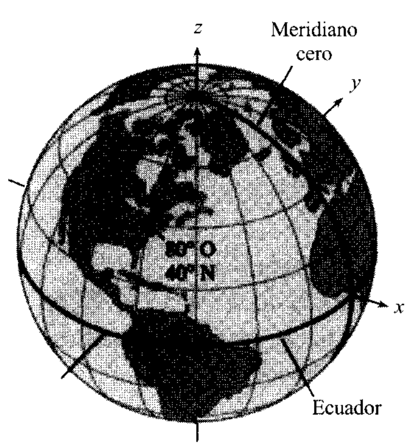


FIGURA 10.74

Coordenadas esféricas

En el **sistema de coordenadas esféricas** cada punto se representa por un trío ordenado: la primera coordenada es una distancia, la segunda y la tercera son ángulos. Es un sistema similar al de longitud-latitud que se suele utilizar para localizar puntos sobre la superficie terrestre. Así, la Figura 10.74 muestra el punto de la superficie terrestre cuya latitud es 40° Norte (del Ecuador) y cuya longitud es 80° Oeste (del meridiano cero). Supuesta la Tierra esférica de radio 4.000 millas, ese punto vendrá descrito como

(4.000, –80°, 50°)

Radio — 80° del meridiano cero en el sentido de las agujas del reloj — 50° del Polo norte hacia abajo

EL SISTEMA DE COORDENADAS ESFÉRICAS

En un **sistema de coordenadas esféricas** un punto P del espacio viene representado por un trío ordenado (ρ, θ, ϕ).

1. ρ es la distancia de P al origen, $\rho \geqslant 0$.
2. θ es el mismo ángulo utilizado en coordenadas cilíndricas para $r \geqslant 0$.
3. ϕ es el ángulo entre el semieje z positivo y el segmento recto $\overrightarrow{OP}$, $0 \leqslant \phi \leqslant \pi$.

Nótese que las coordenadas primera y tercera son siempre no negativas.

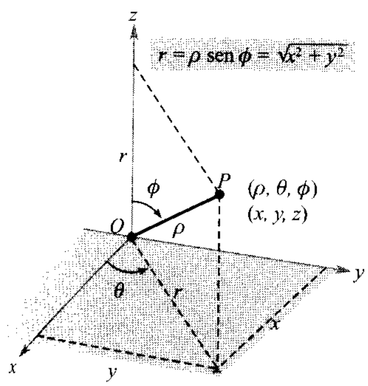


FIGURA 10.75
Coordenadas esféricas.

La relación entre las coordenadas rectangulares y las esféricas se ilustra en la Figura 10.75. Para pasar de uno a otro deben usarse las fórmulas siguientes.

***Esféricas a rectangulares*:**

$$x = \rho \text{ sen } \phi \cos \theta, \qquad y = \rho \text{ sen } \phi \text{ sen } \theta, \qquad z = \rho \cos \phi$$

***Rectangulares a esféricas*:**

$$\rho^2 = x^2 + y^2 + z^2, \qquad \text{tg } \theta = \frac{y}{x}, \qquad \phi = \arccos\left(\frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\right)$$

Para cambiar de coordenadas esféricas a cilíndricas, o viceversa, deben aplicarse las fórmulas siguientes.

Esféricas a cilíndricas (r $\geqslant$ 0):

$$r^2 = \rho^2 \text{ sen}^2 \phi, \qquad \theta = \theta, \qquad z = \rho \cos \phi$$

Cilíndricas a esféricas (r $\geqslant$ 0):

$$\rho = \sqrt{r^2 + z^2}, \qquad \theta = \theta, \qquad \phi = \arccos\left(\frac{z}{\sqrt{r^2 + z^2}}\right)$$

Las coordenadas esféricas son especialmente apropiadas para estudiar superficies que tengan un centro de simetría. Así, la Figura 10.76 muestra tres superficies con ecuaciones muy sencillas en coordenadas esféricas.

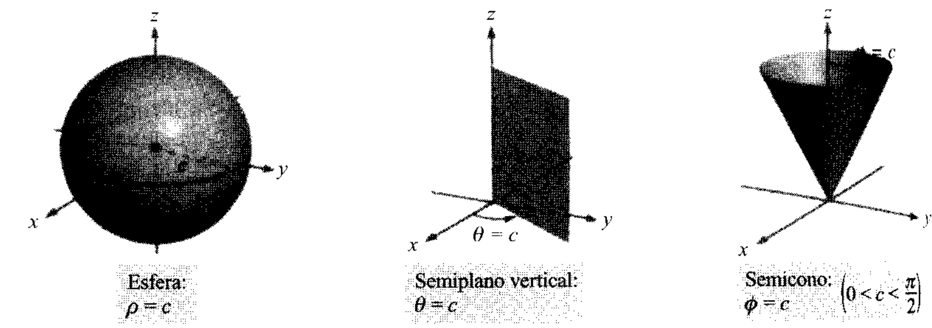


FIGURA 10.76

EJEMPLO 5 Conversión de rectangulares a esféricas

Hallar una ecuación en coordenadas esféricas para las superficies cuyas ecuaciones en coordenadas rectangulares se indican.

a) Cono: $x^2 + y^2 = z^2$
b) Esfera: $x^2 + y^2 + z^2 - 4z = 0$

Solución:

a) Haciendo las sustituciones adecuadas para x, y, z en la ecuación dada se obtiene:

$$x^2 + y^2 = z^2$$
$$\rho^2 \operatorname{sen}^2 \phi \cos^2 \theta + \rho^2 \operatorname{sen}^2 \phi \operatorname{sen}^2 \theta = \rho^2 \cos^2 \phi$$
$$\rho^2 \operatorname{sen}^2 \phi (\cos^2 \theta + \operatorname{sen}^2 \theta) = \rho^2 \cos^2 \phi$$
$$\rho^2 \operatorname{sen}^2 \phi = \rho^2 \cos^2 \phi$$
$$\frac{\operatorname{sen}^2 \phi}{\cos^2 \phi} = 1 \qquad \rho \geqslant 0$$
$$\operatorname{tg}^2 \phi = 1 \qquad \phi = \pi/4 \text{ o } \phi = 3\pi/4$$

La ecuación $\phi = \pi/4$ representa la mitad *superior* del cono y la ecuación $\phi = 3\pi/4$ su mitad *inferior*.

b) Como $\rho^2 = x^2 + y^2 + z^2$ y $z = \rho \cos \phi$, la ecuación dada adopta la siguiente forma en coordenadas esféricas.

$$\rho^2 - 4\rho \cos \phi = 0 \quad \Longrightarrow \quad \rho(\rho - 4 \cos \phi) = 0$$

Descartando por el momento la posibilidad de que $\rho = 0$, obtenemos la ecuación en esféricas

$$\rho - 4 \cos \phi = 0 \qquad \text{o} \qquad \rho = 4 \cos \phi$$

Obsérvese que el conjunto solución de esta ecuación incluye un punto con $\rho = 0$, de manera que no se ha perdido nada al descartar el factor ρ. La esfera representada por la ecuación $\rho = 4 \cos \phi$ puede verse en la Figura 10.77. □

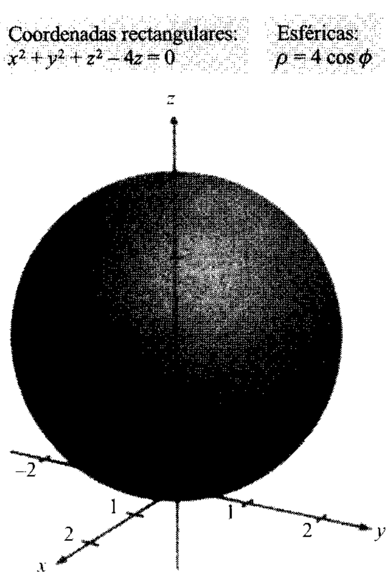


FIGURA 10.77

Ejercicios de la Sección 10.7

En los Ejercicios 1-6, pasar el punto, dado en coordenadas rectangulares, a coordenadas cilíndricas.

1. $(0, 5, 1)$ **2.** $(2\sqrt{2}, -2\sqrt{2}, 4)$
3. $(1, \sqrt{3}, 4)$ **4.** $(\sqrt{3}, -1, 2)$
5. $(2, -2, -4)$ **6.** $(-3, 2, -1)$

En los Ejercicios 7-12, pasar el punto, dado en coordenadas cilíndricas, a coordenadas rectangulares.

7. $(5, 0, 2)$ **8.** $(4, \pi/2, -2)$
9. $(2, \pi/3, 2)$ **10.** $(3, -\pi/4, 1)$
11. $(4, 7\pi/6, 3)$ **12.** $(1, 3\pi/2, 1)$

En los Ejercicios 13-20, expresar en coordenadas rectangulares la ecuación en cilíndricas dada. Esbozar su gráfica.

13. $r = 2$ **14.** $z = 2$
15. $\theta = \pi/6$ **16.** $r = \frac{1}{2}z$
17. $r = 2 \text{ sen } \theta$ **18.** $r = 2 \cos \theta$
19. $r^2 + z^2 = 4$ **20.** $z = r^2 \text{ sen}^2 \theta$

En los Ejercicios 21-26, expresar el punto, dado en coordenadas rectangulares, en coordenadas esféricas.

21. $(4, 0, 0)$ **22.** $(1, 1, 1)$
23. $(-2, 2\sqrt{3}, 4)$ **24.** $(2, 2, 4\sqrt{2})$
25. $(\sqrt{3}, 1, 2\sqrt{3})$ **26.** $(-4, 0, 0)$

En los Ejercicios 27–32, expresar el punto, dado en coordenadas esféricas, en coordenadas rectangulares.

27. $(4, \pi/6, \pi/4)$ **28.** $(12, 3\pi/4, \pi/9)$
29. $(12, -\pi/4, 0)$ **30.** $(9, \pi/4, \pi)$
31. $(5, \pi/4, 3\pi/4)$ **32.** $(6, \pi, \pi/2)$

33. ***Programación***
a) Escribir un programa informático que exprese un punto, dado en coordenadas rectangulares, en coordenadas esféricas.
b) Usar ese programa para expresar en esféricas el punto de coordenadas rectangulares $(3, -4, 2)$.

34. ***Programación***
a) Escribir un programa informático que exprese un punto, dado en coordenadas esféricas, en coordenadas rectangulares.
b) Usar ese programa para expresar en coordenadas rectangulares el punto de coordenadas esféricas $(5, 1, 0{,}5)$.

En los Ejercicios 35-42, hallar una ecuación en coordenadas rectangulares para la ecuación dada en esféricas. Dibujar un esbozo de su gráfica.

35. $\rho = 2$ **36.** $\theta = \frac{3\pi}{4}$
37. $\phi = \frac{\pi}{6}$ **38.** $\phi = \frac{\pi}{2}$
39. $\rho = 4 \cos \phi$ **40.** $\rho = 2 \sec \phi$
41. $\rho = \text{cosec } \phi$ **42.** $\rho = 4 \text{ cosec } \phi \sec \theta$

En los Ejercicios 43-48, pasar el punto de coordenadas cilíndricas a esféricas.

43. $(4, \pi/4, 0)$ **44.** $(2, 2\pi/3, -2)$
45. $(4, -\pi/6, 6)$ **46.** $(-4, \pi/3, 4)$
47. $(12, \pi, 5)$ **48.** $(4, \pi/2, 3)$

En los Ejercicios 49-54, pasar el punto de coordenadas esféricas a cilíndricas.

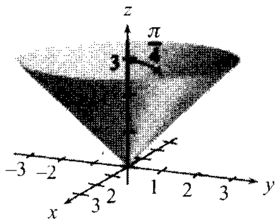
49. $(10, \pi/6, \pi/2)$ **50.** $(4, \pi/18, \pi/2)$
51. $(6, -\pi/6, \pi/3)$ **52.** $(5, -5\pi/6, \pi)$
53. $(8, 7\pi/6, \pi/6)$ **54.** $(7, \pi/4, 3\pi/4)$

En los Ejercicios 55-68, usar una calculadora para pasar de unas coordenadas a otras cada punto dado.

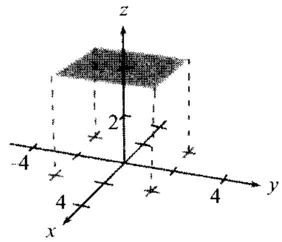
	Rectangulares	*Cilíndricas*	*Esféricas*
55.	$(4, 6, 3)$		
56.	$(6, -2, -3)$		
57.		$(5, \pi/9, 8)$	
58.		$(10, -0{,}75, 6)$	
59.			$(20, 2\pi/3, \pi/4)$
60.			$(7{,}5, 0{,}25, 1)$
61.	$(3, -2, 2)$		
62.	$(3\sqrt{2}, 3\sqrt{2}, -3)$		
63.	$(5/2, 4/3, -3/2)$		
64.	$(0, -5, 4)$		
65.		$(5, 3\pi/4, -5)$	
66.		$(-2, 11\pi/6, 3)$	
67.		$(-3{,}5, 2{,}5, 6)$	
68.		$(8{,}25, 1{,}3, -4)$	

En los Ejercicios 69-74, asociar cada ecuación (dada en coordenadas cilíndricas o esféricas) con su gráfica.

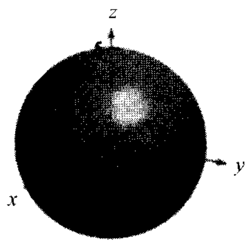
a)



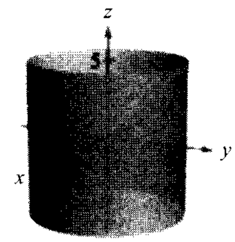
b)



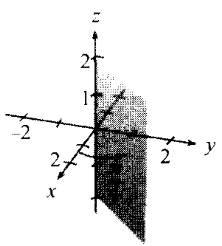
c)



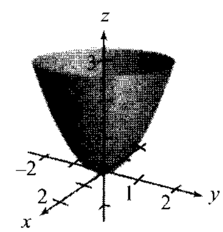
d)



e)



f)



69. $r = 5$ **70.** $\theta = \frac{\pi}{4}$

71. $\rho = 5$ **72.** $\phi = \frac{\pi}{4}$

73. $r^2 = z$ **74.** $\rho = 4 \sec \phi$

En los Ejercicios 75-82, pasar la ecuación rectangular a coordenadas *a*) cilíndricas, *b*) esféricas.

75. $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ **76.** $4(x^2 + y^2) = z^2$

77. $x^2 + y^2 + z^2 - 2z = 0$ **78.** $x^2 + y^2 = z$

79. $x^2 + y^2 = 4y$ **80.** $x^2 + y^2 = 16$

81. $x^2 - y^2 = 9$ **82.** $y = 4$

En los Ejercicios 83-86, dibujar el sólido, que se da en coordenadas cilíndricas.

83. $0 \leqslant \theta \leqslant \pi/2,\ 0 \leqslant r \leqslant 2,\ 0 \leqslant z \leqslant 4$

84. $-\pi/2 \leqslant \theta \leqslant \pi/2,\ 0 \leqslant r \leqslant 3,\ 0 \leqslant z \leqslant r\cos\theta$

85. $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi,\ 0 \leqslant r \leqslant a,\ r \leqslant z \leqslant a$

86. $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi,\ 2 \leqslant r \leqslant 4,\ z^2 \leqslant -r^2 + 6r - 8$

En los Ejercicios 87 y 88, dibujar el sólido, descrito en coordenadas esféricas.

87. $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi,\ 0 \leqslant \phi \leqslant \pi/6,\ 0 \leqslant \rho \leqslant a \sec \phi$

88. $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi,\ \pi/4 \leqslant \phi \leqslant \pi/2,\ 0 \leqslant \rho \leqslant 1$

Para pensar En los Ejercicios 89-92, hallar desigualdades que describan el sólido y precisar el sistema de coordenadas utilizado. Posicionar el sólido en el sistema de coordenadas de manera que las desigualdades sean simples.

89. Un cubo de arista 10 cm.

90. Una capa cilíndrica de 8 metros de longitud con 0,75 m de radio interior y 1,25 m de radio exterior.

91. Una capa esférica con 4 pulgadas de radio interior y 6 de radio exterior.

92. El sólido que queda tras perforar una esfera de 6 pulgadas de diámetro con un orificio de 1 pulgada de diámetro que la atraviesa por su centro.

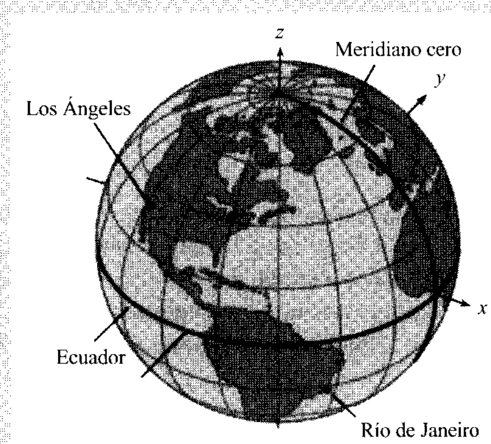
93. Identificar la curva intersección de las superficies dadas en cilíndricas por $z = \operatorname{sen} \theta$ y $r = 1$.

94. Identificar la curva intersección de las superficies dadas en esféricas por $\rho = 2 \sec \phi$ y $\rho = 4$.

PROYECTO PARA LA SECCIÓN

Los Ángeles está situada a 34,05° latitud norte y a 118,24° longitud oeste. Río de Janeiro está a 22,90° latitud sur y 43,22° longitud oeste (véase figura). Suponiendo que la Tierra es esférica, con un radio de 4.000 millas, hallar:

a) Las coordenadas esféricas de cada ciudad.
b) Sus coordenadas rectangulares.
c) El ángulo (en radianes) entre los vectores del centro de la Tierra a cada ciudad.
d) La distancia s por un círculo máximo entre las dos ciudades. *(Ayuda:* $s = r\theta$*.)*



e) Repetir los apartados *a*)-*d*) para Boston (42,36° latitud norte y 71,06° longitud oeste) y Honolulu (21,31° latitud norte y 157,86° longitud oeste).