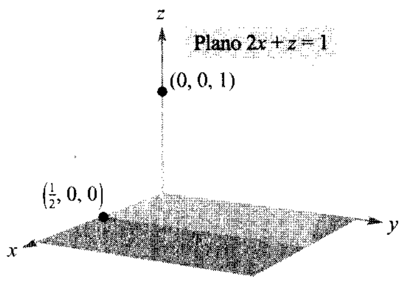
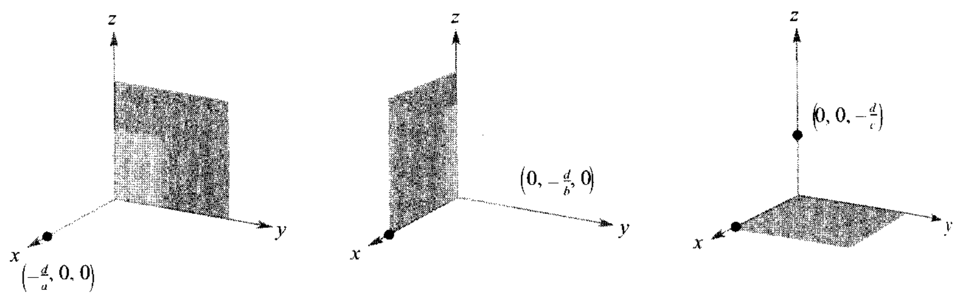


FIGURA 10.50

Si en la ecuación de un plano está ausente alguna de las variables, como en $2x + z = 1$, el plano es *paralelo al eje* de la variable ausente (Figura 10.50). Si faltan dos variables en la ecuación de un plano, éste es *paralelo al plano coordenado* de las dos variables ausentes (Figura 10.51).



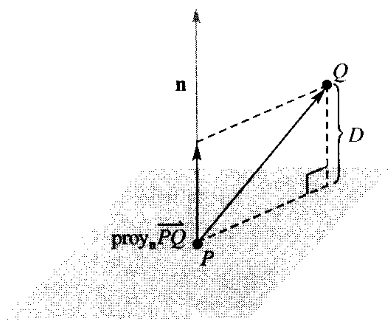
El plano $ax + d = 0$ es paralelo al plano yz

El plano $by + d = 0$ es paralelo al plano xz

El plano $cz + d = 0$ es paralelo al plano xy

FIGURA 10.51

Distancias entre puntos, rectas y planos



$D = \|\text{proy}_{\mathbf{n}}\overrightarrow{PQ}\|$

FIGURA 10.52
Distancia de un punto a un plano.

Cerramos la sección analizando dos tipos de problemas sobre distancias en el espacio.

1. Calcular la distancia de un punto a un plano.
2. Calcular la distancia de un punto a una recta.

Sus soluciones ilustran la versatilidad y la utilidad de los vectores en Geometría analítica: el primer problema se resuelve mediante el *producto escalar* y el segundo mediante el *producto vectorial.*

La distancia D de un punto Q a un plano es la longitud del segmento más corto que une Q con el plano (Figura 10.52). Si P es un punto *arbitrario* del plano, podemos hallar esa distancia proyectando el vector $\overrightarrow{PQ}$ sobre el vector normal $\mathbf{n}$. La longitud de esta proyección es la distancia buscada.

TEOREMA 10.13 **DISTANCIA DE UN PUNTO A UN PLANO**

La distancia a un plano de un punto Q (no perteneciente al plano) es

$$D = \|\text{proy}_{\mathbf{n}}\overrightarrow{PQ}\| = \frac{|\overrightarrow{PQ} \cdot \mathbf{n}|}{\|\mathbf{n}\|}$$

donde P es un punto cualquiera del plano y $\mathbf{n}$ es normal al plano.

Para determinar un punto en el plano de ecuación $ax + by + cz + d = 0$ $(a \neq 0)$, hacemos $y = 0$ y $z = 0$. De la ecuación resultante, $ax + d = 0$, concluimos que $(-d/a, 0, 0)$ está en ese plano.

EJEMPLO 5 Distancia de un punto a un plano

Calcular la distancia del punto $Q(1, 5, -4)$ al plano

$$3x - y + 2z = 6$$

Nota. La elección del punto P en el Ejemplo 5 es arbitraria. Considere un punto distinto del plano y compruebe que se obtiene la misma distancia.

Solución: Sabemos que $\mathbf{n} = \langle 3, -1, 2\rangle$ es normal al plano dado. Para encontrar un punto del plano, hacemos $y = 0$ y $z = 0$. El resultado es el punto $P(2, 0, 0)$. El vector de P a Q viene dado por

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PQ} &= \langle 1-2, 5-0, -4-0\rangle \\ &= \langle -1, 5, -4\rangle\end{aligned}$$

La fórmula de la distancia en el Teorema 10.13 implica que

$$\begin{aligned}D = \frac{|\overrightarrow{PQ}\cdot\mathbf{n}|}{\|\mathbf{n}\|} &= \frac{|\langle -1, 5, -4\rangle \cdot \langle 3, -1, 2\rangle|}{\sqrt{9+1+4}} \\ &= \frac{|-3-5-8|}{\sqrt{14}} \\ &= \frac{16}{\sqrt{14}}\end{aligned}$$ □

De acuerdo con el Teorema 10.13, la distancia del punto $Q(x_0, y_0, z_0)$ al plano de ecuación $ax + by + cz + d = 0$ es

$$D = \frac{|a(x_0 - x_1) + b(y_0 - y_1) + c(z_0 - z_1)|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

es decir

$$\boxed{D = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}}$$ Distancia punto-plano

donde $P(x_1, y_1, z_1)$ es un punto del plano y $d = -(ax_1 + by_1 + cz_1)$.

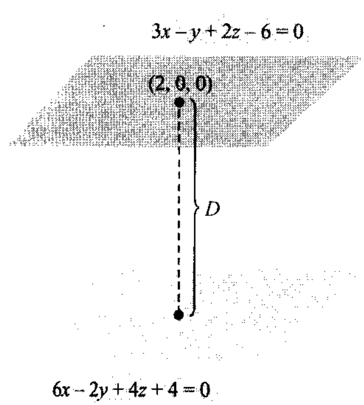


FIGURA 10.53
La distancia entre los planos paralelos es aproximadamente 2,14.

EJEMPLO 6 Distancia entre dos planos paralelos

Calcular la distancia entre los planos paralelos

$$3x - y + 2z - 6 = 0 \quad \text{y} \quad 6x - 2y + 4z + 4 = 0$$

Solución: Para hallar la distancia entre los dos planos, que se muestran en la Figura 10.53, elegimos un punto del primero, digamos $(x_0, y_0, z_0) = (2, 0, 0)$. Entonces, de la ecuación del segundo plano resulta $a = 6$, $b = -2$, $c = 4$, y $d = 4$, así que la distancia viene dada por

$$\begin{aligned}D &= \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \\ &= \frac{|6(2) + (-2)(0) + (4)(0) + 4|}{\sqrt{6^2 + (-2)^2 + 4^2}} = \frac{16}{\sqrt{56}} = \frac{8}{\sqrt{14}} \approx 2,14\end{aligned}$$ □

La fórmula de la distancia de un punto a una recta en el espacio recuerda la de la distancia de un punto a un plano, salvo que el producto escalar queda reemplazado por el producto vectorial y el vector normal **n** por un vector de dirección de la recta.

TEOREMA 10.14 **DISTANCIA DE UN PUNTO A UNA RECTA EN EL ESPACIO**

La distancia de un punto Q a una recta en el espacio viene dada por

$$D = \frac{\|\overrightarrow{PQ} \times \mathbf{u}\|}{\|\mathbf{u}\|}$$

donde u es un vector de dirección de la recta y P un punto de la recta.

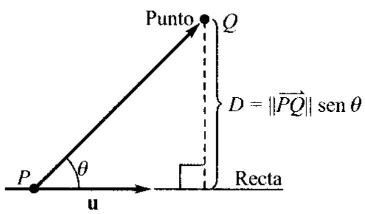


FIGURA 10.54
Distancia de un punto a una recta.

Demostración: En la Figura 10.54 vemos que la distancia D del punto Q a la recta verifica $D = \|\overrightarrow{PQ}\| \operatorname{sen} \theta$, donde θ es el ángulo entre **u** y $\overrightarrow{PQ}$. Del Teorema 10.8 se sigue que

$$\|\mathbf{u}\|\,\|\overrightarrow{PQ}\| \operatorname{sen} \theta = \|\mathbf{u} \times \overrightarrow{PQ}\| = \|\overrightarrow{PQ} \times \mathbf{u}\|$$

En consecuencia,

$$D = \|\overrightarrow{PQ}\| \operatorname{sen} \theta = \frac{\|\overrightarrow{PQ} \times \mathbf{u}\|}{\|\mathbf{u}\|} \qquad \square$$

EJEMPLO 7 Distancia de un punto a una recta

Hallar la distancia del punto $Q(3, -1, 4)$ a la recta dada por

$$x = -2 + 3t, \quad y = -2t, \quad \text{y} \quad z = 1 + 4t$$

Solución: Usando los números directores 3, -2, 4 sabemos que un vector de dirección de la recta es

$$\mathbf{u} = \langle 3, -2, 4 \rangle \qquad \text{Vector de dirección}$$

Para determinar un punto de la recta hacemos $t = 0$, con lo que se obtiene

$$P = (-2, 0, 1)$$

Así pues,

$$\overrightarrow{PQ} = \langle 3 - (-2), -1 - 0, 4 - 1 \rangle = \langle 5, -1, 3 \rangle$$

y podemos calcular el producto vectorial

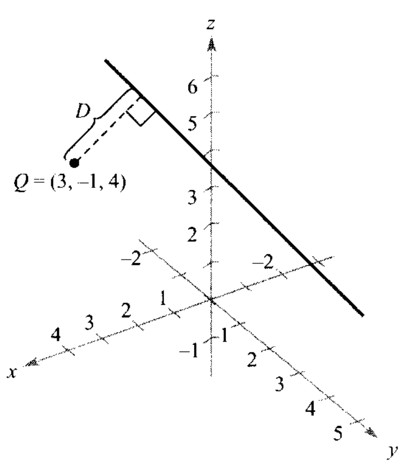


FIGURA 10.55
La distancia entre el punto Q y la recta es $\sqrt{6} \approx 2{,}45$.

$$\overrightarrow{PQ} \times \mathbf{u} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 5 & -1 & 3 \\ 3 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 2\mathbf{i} - 11\mathbf{j} - 7\mathbf{k} = \langle 2, -11, -7 \rangle$$

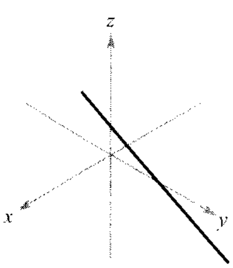
Finalmente, del Teorema 10.14 concluimos que la distancia pedida es

$$D = \frac{\|\overrightarrow{PQ} \times \mathbf{u}\|}{\|\mathbf{u}\|} = \frac{\sqrt{174}}{\sqrt{29}} = \sqrt{6} \approx 2{,}45 \qquad \text{(Véase Figura 10.55)} \qquad \square$$

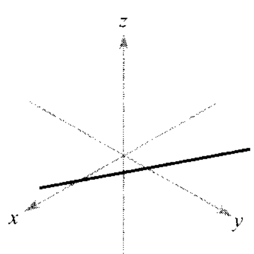
Ejercicios de la Sección 10.5

En los Ejercicios 1 y 2, la figura muestra la gráfica de una recta dada por las ecuaciones paramétricas adjuntas. *a*) Dibujar una flecha sobre la recta que indique su orientación. *b*) Hallar las coordenadas de dos puntos, P y Q, de la recta y considerar el vector $\overrightarrow{PQ}$. ¿Qué relación hay entre las componentes de este vector y los coeficientes de t en las ecuaciones paramétricas? ¿Cuál es la razón de tal relación? *c*) Determinar las coordenadas de los puntos de intersección con los planos de coordenadas. Si la recta no corta a uno de los planos de coordenadas explicar por qué.

1. $x = 1 + 3t$
$y = 2 - t$
$z = 2 + 5t$



2. $x = 2 - 3t$
$y = 2$
$z = 1 - t$



En los Ejercicios 3-8, hallar ecuaciones *a*) paramétricas y *b*) simétricas, para la recta que pasa por el punto y es paralela al vector o recta indicados. (Para cada recta, expresar los números directores como enteros.)

	Punto	*Paralela a*
3.	(0, 0, 0)	$\mathbf{v} = \langle 1, 2, 3\rangle$
4.	(0, 0, 0)	$\mathbf{v} = \left\langle -2, \frac{5}{2}, 1\right\rangle$
5.	(−2, 0, 3)	$\mathbf{v} = 2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$
6.	(−2, 0, 3)	$\mathbf{v} = 6\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$
7.	(1, 0, 1)	$x = 3 + 3t,\ y = 5 - 2t,\ z = -7 + t$
8.	(−3, 5, 4)	$\frac{x-1}{3} = \frac{y+1}{-2} = z - 3$

En los Ejercicios 9 y 10, hallar ecuaciones *a*) paramétricas y *b*) simétricas para la recta que pasa por los dos puntos. (Para cada recta, expresar los números directores como enteros.)

9. $(5, -3, -2),\ \left(-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, 1\right)$

10. $(1, 0, 1),\ (1, 3, -2)$

En los Ejercicios 11 y 12, hallar ecuaciones paramétricas para la recta.

11. La recta que pasa por el punto (2, 3, 4) y es paralela a los planos xz e yz.

12. La recta que pasa por el punto (2, 3, 4) y es perpendicular al plano $3x + 2y - z = 6$.

En los Ejercicios 13 y 14, determinar qué puntos están en la recta L.

13. La recta que pasa por el punto (−2, 3, 1) y es paralela al vector $\mathbf{v} = 4\mathbf{i} - \mathbf{k}$.
a) (2, 3, 0) *b*) (−6, 3, 2) *c*) (2, 1, 0) *d*) (6, 3, −2)

14. La recta que pasa por los puntos (2, 0, −3) y (4, 2, −2).
a) (4, 1, −2) *b*) $\left(\frac{5}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{11}{4}\right)$ *c*) (−1, −3, −4)

En los Ejercicios 15-18, averiguar si las rectas se cortan. En caso afirmativo, hallar el punto de intersección y el coseno del ángulo de intersección.

15. $x = 4t + 2,\ y = 3,\ z = -t + 1$
$x = 2s + 2,\ y = 2s + 3,\ z = s + 1$

16. $x = -3t + 1,\ y = 4t + 1,\ z = 2t + 4$
$x = 3s + 1,\ y = 2s + 4,\ z = -s + 1$

17. $\frac{x}{3} = \frac{y-2}{-1} = z + 1,\ \frac{x-1}{4} = y + 2 = \frac{z+3}{-3}$

18. $\frac{x-2}{-3} = \frac{y-2}{6} = z - 3,\ \frac{x-3}{2} = y + 5 = \frac{z+2}{4}$

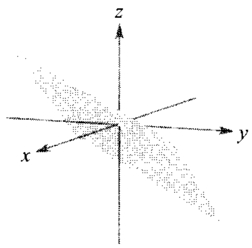
En los Ejercicios 19 y 20, representar en una calculadora el par de rectas y hallar su punto de intersección.

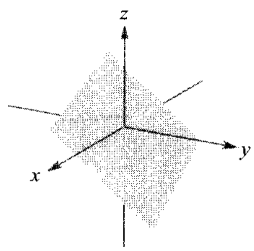
19. $x = 2t + 3,\ y = 5t - 2,\ z = -t + 1$
$x = -2s + 7,\ y = s + 8,\ z = 2s - 1$

20. $x = 2t - 1,\ y = -4t + 10,\ z = t$
$x = 5s - 12,\ y = 3s + 11,\ z = -2s - 4$

Producto vectorial En los Ejercicios 21 y 22, *a*) hallar las coordenadas de tres puntos P, Q y R del plano y considerar los vectores $\overrightarrow{PQ}$ y $\overrightarrow{PR}$. *b*) Hallar $\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}$. ¿Qué relación hay entre las componentes del producto vectorial y los coeficientes en la ecuación del plano? ¿Por qué?

21. $4x - 3y - 6z = 6$ **22.** $2x + 3y + 4z = 4$





En los Ejercicios 23-28, hallar una ecuación del plano que pasa por el punto y es perpendicular al vector o recta dados.

	Punto	*Perpendicular a*
23.	(2, 1, 2)	$\mathbf{n} = \mathbf{i}$
24.	(1, 0, −3)	$\mathbf{n} = \mathbf{k}$
25.	(3, 2, 2)	$\mathbf{n} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - \mathbf{k}$
26.	(0, 0, 0)	$\mathbf{n} = -3\mathbf{i} + 2\mathbf{k}$
27.	(0, 0, 6)	$x = 1 - t,\ y = 2 + t,\ z = 4 - 2t$
28.	(3, 2, 2)	$\dfrac{x-1}{4} = y + 2 = \dfrac{z+3}{-3}$

En los Ejercicios 29-40, hallar una ecuación del plano.

29. El plano que pasa por (0, 0, 0), (1, 2, 3) y (−2, 3, 3).

30. El plano que pasa por (1, 2, −3), (2, 3, 1), y (0, −2, −1).

31. El plano que pasa por (1, 2, 3), (3, 2, 1), y (−1, −2, 2).

32. El plano que pasa por el punto (1, 2, 3) paralelo al plano yz.

33. El plano que pasa por el punto (1, 2, 3) y es paralelo al plano xy.

34. El plano que contiene al eje y y forma un ángulo de $\pi/6$ con el semieje x positivo.

35. El plano que contiene las rectas de ecuaciones

$$\frac{x-1}{-2} = y - 4 = z \quad \text{y} \quad \frac{x-2}{-3} = \frac{y-1}{4} = \frac{z-2}{-1}$$

36. El plano que pasa por el punto (2, 2, 1) y contiene la recta dada por

$$\frac{x}{2} = \frac{y-4}{-1} = z$$

37. El plano que pasa por los puntos (2, 2, 1) y (−1, 1, −1) y es perpendicular al plano $2x - 3y + z = 3$.

38. El plano que pasa por los puntos (3, 2, 1) y (3, 1, −5) y es perpendicular al plano $6x + 7y + 2z = 10$.

39. El plano que pasa por los puntos (1, −2, −1) y (2, 5, 6) y es paralelo al eje x.

40. El plano que pasa por los puntos (4, 2, 1) y (−3, 5, 7) y es paralelo al eje z.

En los Ejercicios 41-46, averiguar si los planos son paralelos, perpendiculares o ninguna de ambas cosas. En los casos en que no sean paralelos ni ortogonales, hallar el ángulo de intersección.

41. $5x - 3y + z = 4$
$x + 4y + 7z = 1$

42. $3x + y - 4z = 3$
$-9x - 3y + 12z = 4$

43. $x - 3y + 6z = 4$
$5x + y - z = 4$

44. $3x + 2y - z = 7$
$x - 4y + 2z = 0$

45. $x - 5y - z = 1$
$5x - 25y - 5z = -3$

46. $2x - z = 1$
$4x + y + 8z = 10$

En los Ejercicios 47-52, marcar las intersecciones y dibujar la gráfica del plano.

47. $4x + 2y + 6z = 12$ **48.** $3x + 6y + 2z = 6$

49. $2x - y + 3z = 4$ **50.** $2x - y + z = 4$

51. $y + z = 5$ **52.** $x + 2y = 4$

En los Ejercicios 53-56, representar el plano en una calculadora.

53. $2x + y - z = 6$ **54.** $x - 3z = 3$

55. $-5x + 4y - 6z = -8$ **56.** $2{,}1x - 4{,}7y - z = -3$

En los Ejercicios 57 y 58, hallar ecuaciones paramétricas para la recta intersección de los dos planos.

57. $3x + 2y - z = 7$
$x - 4y + 2z = 0$

58. $x - 3y + 6z = 4$
$5x + y - z = 4$

En los Ejercicios 59-62, hallar el punto de intersección (si lo hay) de la recta con el plano. Determinar asimismo si la recta está contenida en el plano.

59. $2x - 2y + z = 12,\ x - \dfrac{1}{2} = \dfrac{y + (3/2)}{-1} = \dfrac{z+1}{2}$

60. $2x + 3y = -5, \dfrac{x-1}{4} = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z-3}{6}$

61. $2x + 3y = 10, \dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y+1}{-2} = z - 3$

62. $5x + 3y = 17, \dfrac{x-4}{2} = \dfrac{y+1}{-3} = \dfrac{z+2}{5}$

En los Ejercicios 63 y 64, calcular la distancia del punto al plano.

63. $(0, 0, 0)$
$2x + 3y + z = 12$

64. $(1, 2, 3)$
$2x - y + z = 4$

En los Ejercicios 65 y 66, calcular la distancia entre los planos.

65. $x - 3y + 4z = 10$
$x - 3y + 4z = 6$

66. $2x - 4z = 4$
$2x - 4z = 10$

En los Ejercicios 67 y 68, hallar la distancia del punto a la recta dada en forma paramétrica.

67. $(1, 5, -2)$; $x = 4t - 2$, $y = 3$, $z = -t + 1$

68. $(4, 1, -2)$; $x = 2t + 2$, $y = 2t$, $z = t - 3$

69. ***Un modelo matemático*** El consumo *per capita* (en libras) de distintos tipos de leche en EE.UU. viene recogido en la tabla. Los consumos de leche desnatada, semidesnatada y entera se denotan por las variables x, y, z respectivamente. *(Fuente: U.S. Department of Agriculture.)*

Año	1970	1975	1980	1985
x	11,6	11,5	11,6	12,6
y	29,8	53,2	70,1	83,3
z	213,5	174,9	141,7	119,7

Año	1990	1991	1992	1993
x	22,9	23,9	25,0	26,7
y	98,3	99,7	99,4	97,1
z	87,6	84,7	81,5	77,8

Un modelo para esos datos viene dado por

$$0{,}987x + 1{,}71y + z = 276$$

a) Completar una cuarta fila de la tabla usando ese modelo para estimar z para valores dados de x e y. Comparar las aproximaciones obtenidas con los valores reales de z.
b) Según este modelo, ¿qué efecto tendrá un aumento del consumo de dos tipos de leche en el consumo del tipo restante?
c) Dibujar las trazas del plano y su gráfica en el primer octante (puesto que x, y, z han de ser no negativas).

70. ***Optimización*** Consideremos la recta de ecuaciones paramétricas

$$x = -t + 3,\ y = \frac{1}{2}t + 1,\ z = 2t - 1$$

y el punto $(4, 3, s)$ para un número real s arbitrario.
a) Expresar la distancia del punto a la recta en función de s.
b) Representar esa función con ayuda de una calculadora. Hallar, a la vista de la gráfica, el valor de s que hace mínima la distancia.
c) Usar el *zoom* para ampliar varias veces la gráfica del apartado *b*). ¿Parece que la gráfica tiene asíntotas oblicuas? Explicar la respuesta. Si es así, hallar sus ecuaciones.

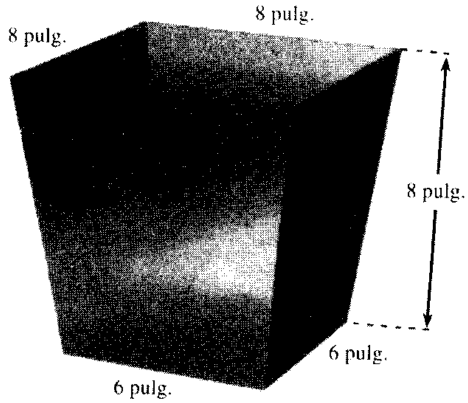
71. ***Para pensar***
a) Describir y hallar una ecuación de la superficie generada por los puntos (x, y, z) que distan cuatro unidades del punto $(3, -2, 5)$.
b) Describir y hallar una ecuación de la superficie generada por los puntos (x, y, z) que distan cuatro unidades del plano

$$4x - 3y + z = 10$$

72. ***Para pensar*** Consideremos dos vectores no nulos, $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$. Describir la figura geométrica generada por los puntos terminales de los siguientes vectores, donde s y t denotan números reales arbitrarios.

a) $t\mathbf{v}$ *b*) $\mathbf{u} + t\mathbf{v}$ *c*) $s\mathbf{u} + t\mathbf{v}$

73. ***Diseño industrial*** Hallar el ángulo entre lados adyacentes del contenedor de la figura de la página siguiente, al que vierte el cereal una cosechadora.



74. Si a_1, b_1, c_1 y a_2, b_2, c_2 son dos conjuntos de números directores de una misma recta, probar que existe un escalar d tal que

$$a_1 = a_2 d,\ b_1 = b_2 d,\ \text{y}\ c_1 = c_2 d$$

¿Verdadero o falso? En los Ejercicios 75 y 76, discutir si el enunciado es correcto o no. Si no lo es, explicar la razón o dar un ejemplo que muestre su falsedad.

75. Si $\mathbf{v} = a_1\mathbf{i} + b_1\mathbf{j} + c_1\mathbf{k}$ es cualquier vector en el plano dado por $a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$, entonces $a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 = 0$

76. Dos rectas cualesquiera en el espacio o se cortan o son paralelas.

77. Consideremos el plano que pasa por los puntos P, R y S. Demostrar que la distancia de un punto Q a ese plano es

$$\text{Distancia} = \frac{|\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w})|}{\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\|}$$

donde $\mathbf{u} = \overrightarrow{PR}$, $\mathbf{v} = \overrightarrow{PS}$, y $\mathbf{w} = \overrightarrow{PQ}$

78. Probar que la distancia entre los planos paralelos $ax + by + cz + d_1 = 0$ y $ax + by + cz + d_2 = 0$ es

$$\text{Distancia} = \frac{|d_1 - d_2|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

PROYECTO PARA LA SECCIÓN

En esta sección hemos presentado dos fórmulas para calcular distancias: de un punto a un plano y de un punto a una recta. En este proyecto va a analizar un tercer problema de distancias: la distancia entre dos rectas que se cruzan, esto es, dos rectas que ni se cortan ni son paralelas (véase figura).

a) Considere las dos rectas en el espacio

$$L_1: x = 4 + 5t,\ y = 5 + 5t,\ z = 1 - 4t$$
$$L_2: x = 4 + s,\ y = -6 + 8s,\ z = 7 - 3s$$

i) Probar que no son paralelas.
ii) Probar que no se cortan, de modo que son dos rectas que se cruzan.
iii) Demostrar que esas dos rectas están contenidas en dos planos paralelos.
iv) Calcular la distancia entre los dos planos del apartado iii). Ésta es, por definición, la distancia entre las dos rectas que se cruzan.

b) Hallar, por el procedimiento anterior, la distancia entre las rectas

$$L_1: x = 2t,\ y = 4t,\ z = 6t$$
$$L_2: x = 1 - s,\ y = 4 + s,\ z = -1 + s$$

c) Ídem para las rectas

$$L_1: x = 3t,\ y = 2 - t,\ z = -1 + t$$
$$L_2: x = 1 + 4s,\ y = -2 + s,\ z = -3 - 3s$$

d) Escribir una fórmula que permita calcular la distancia entre las rectas que se cruzan

$$L_1: x = x_1 + a_1t,\ y = y_1 + b_1t,\ z = z_1 + c_1t$$
$$L_2: x = x_2 + a_2s,\ y = y_2 + b_2s,\ z = z_2 + c_2s$$