Demostración: En la Figura 10.41 se observa que

$\|\mathbf{v} \times \mathbf{w}\|$ = área de la base y $\|\text{proy}_{\mathbf{v}\times\mathbf{w}}\mathbf{u}\|$ = altura del paralelepípedo.

Por consiguiente, el volumen es

$$\begin{aligned} V &= (\text{altura})(\text{área de la base}) = \|\text{proy}_{\mathbf{v}\times\mathbf{w}}\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\times\mathbf{w}\| \\ &= \left|\frac{\mathbf{u}\cdot(\mathbf{v}\times\mathbf{w})}{\|\mathbf{v}\times\mathbf{w}\|}\right|\|\mathbf{v}\times\mathbf{w}\| \\ &= |\mathbf{u}\cdot(\mathbf{v}\times\mathbf{w})| \end{aligned}$$

□

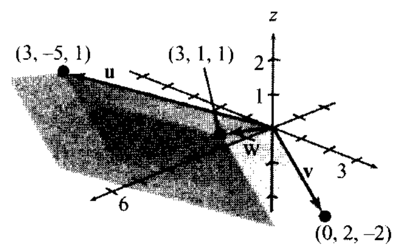


FIGURA 10.42
El paralelepípedo tiene volumen 36.

EJEMPLO 5 Cálculo de un volumen mediante el producto mixto

Calcular el volumen del paralelepípedo que tiene a $\mathbf{u} = 3\mathbf{i} - 5\mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{v} = 2\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$, y $\mathbf{w} = 3\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$ como aristas adyacentes (véase Figura 10.42).

Solución: Del Teorema 10.10 se sigue que

$$\begin{aligned} V &= |\mathbf{u}\cdot(\mathbf{v}\times\mathbf{w})| \\ &= \begin{vmatrix} 3 & -5 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} \\ &= 3\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - (-5)\begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + (1)\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \\ &= 3(4) + 5(6) = 1(-6) \\ &= 36 \end{aligned}$$

□

Del Teorema 10.10 se desprende que el volumen del paralelepípedo es 0 si y sólo si los tres vectores son coplanarios. Esto es, tres vectores $\mathbf{u} = \langle u_1, u_2, u_3\rangle$, $\mathbf{v} = \langle v_1, v_2, v_3\rangle$, y $\mathbf{w} = \langle w_1, w_2, w_3\rangle$ con el mismo punto inicial están en un plano si y sólo si

$$\mathbf{u}\cdot(\mathbf{v}\times\mathbf{w}) = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} = 0$$

Ejercicios de la Sección 10.4

En los Ejercicios 1-6, hallar el producto vectorial de los vectores unitarios y dibujar el resultado.

1. $\mathbf{j}\times\mathbf{i}$ **2.** $\mathbf{i}\times\mathbf{j}$

3. $\mathbf{j}\times\mathbf{k}$ **4.** $\mathbf{k}\times\mathbf{j}$

5. $\mathbf{i}\times\mathbf{k}$ **6.** $\mathbf{k}\times\mathbf{i}$

En los Ejercicios 7-12, calcular $\mathbf{u}\times\mathbf{v}$ y probar que es ortogonal tanto a $\mathbf{u}$ como a $\mathbf{v}$.

7. $\mathbf{u} = \langle 2, -3, 1\rangle$
$\mathbf{v} = \langle 1, -2, 1\rangle$

8. $\mathbf{u} = \langle -1, 1, 2\rangle$
$\mathbf{v} = \langle 0, 1, 0\rangle$

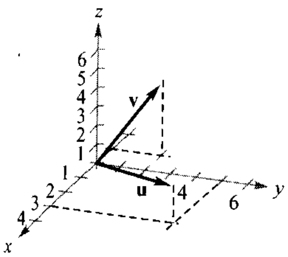
9. $\mathbf{u} = \langle 12, -3, 0\rangle$
$\mathbf{v} = \langle -2, 5, 0\rangle$

10. $\mathbf{u} = \langle -10, 0, 6\rangle$
$\mathbf{v} = \langle 7, 0, 0\rangle$

11. $\mathbf{u} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$
$\mathbf{v} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$

12. $\mathbf{u} = \mathbf{j} + 6\mathbf{k}$
$\mathbf{v} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$

Para pensar En los Ejercicios 13-16, usar los vectores **u** y **v** de la figura para dibujar un vector en la dirección del producto vectorial indicado en un sistema dextrógiro.



13. $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ **14.** $\mathbf{v} \times \mathbf{u}$

15. $(-\mathbf{v}) \times \mathbf{u}$ **16.** $\mathbf{u} \times (\mathbf{u} \times \mathbf{v})$

En los Ejercicios 17-20, usar una calculadora para hallar $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ y un vector unitario ortogonal a **u** y **v**.

17. $\mathbf{u} = \langle 4, -3.5, 7 \rangle$
$\mathbf{v} = \langle -1, 8, 4 \rangle$

18. $\mathbf{u} = \langle -8, -6, 4 \rangle$
$\mathbf{v} = \langle 10, -12, -2 \rangle$

19. $\mathbf{u} = -3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 5\mathbf{k}$
$\mathbf{v} = \frac{1}{2}\mathbf{i} - \frac{3}{4}\mathbf{j} + \frac{1}{10}\mathbf{k}$

20. $\mathbf{u} = \frac{2}{3}\mathbf{k}$
$\mathbf{v} = \frac{1}{2}\mathbf{i} + 6\mathbf{k}$

21. ***Programación*** Escribir un programa que, dados vectores **u** y **v** en forma de componentes, calcule $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ y $\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\|$.

22. Usar el programa anterior para calcular $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ y $\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\|$
a) $\mathbf{u} = \langle 8, -4, 2 \rangle$, $\mathbf{v} = \langle 2, 5, 2 \rangle$
b) $\mathbf{u} = \langle -2, 6, 10 \rangle$, $\mathbf{v} = \langle 3, 8, 5 \rangle$

Área En los Ejercicios 23-26, calcular el área del paralelogramo que tiene a los vectores dados como lados adyacentes. Verificar el resultado con una calculadora.

23. $\mathbf{u} = \mathbf{j}$
$\mathbf{v} = \mathbf{j} + \mathbf{k}$

24. $\mathbf{u} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$
$\mathbf{v} = \mathbf{j} + \mathbf{k}$

25. $\mathbf{u} = \langle 3, 2, -1 \rangle$
$\mathbf{v} = \langle 1, 2, 3 \rangle$

26. $\mathbf{u} = \langle 2, -1, 0 \rangle$
$\mathbf{v} = \langle -1, 2, 0 \rangle$

Área En los Ejercicios 27 y 28, comprobar que los puntos son vértices de un paralelogramo y calcular su área.

27. (1, 1, 1), (2, 3, 4), (6, 5, 2), (7, 7, 5)

28. (2, −1, 1), (5, 1, 4), (0, 1, 1), (3, 3, 4)

Área En los Ejercicios 29-32, calcular el área del triángulo cuyos vértices se especifican. (*Ayuda:* El área del triángulo con **u** y **v** como lados adyacentes es $\frac{1}{2}\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\|$).

29. (0, 0, 0), (1, 2, 3), (−3, 0, 0)

30. (2, −3, 4), (0, 1, 2), (−1, 2, 0)

31. (1, 3, 5), (3, 3, 0), (−2, 0, 5)

32. (1, 2, 0), (−2, 1, 0), (0, 0, 0)

En los Ejercicios 33-36, calcular $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w})$

33. $\mathbf{u} = \mathbf{i}$
$\mathbf{v} = \mathbf{j}$
$\mathbf{w} = \mathbf{k}$

34. $\mathbf{u} = \langle 1, 1, 1 \rangle$
$\mathbf{v} = \langle 2, 1, 0 \rangle$
$\mathbf{w} = \langle 0, 0, 1 \rangle$

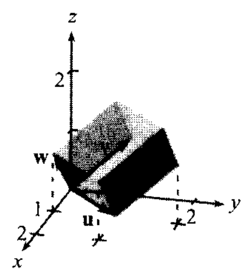
35. $\mathbf{u} = \langle 2, 0, 1 \rangle$
$\mathbf{v} = \langle 0, 3, 0 \rangle$
$\mathbf{w} = \langle 0, 0, 1 \rangle$

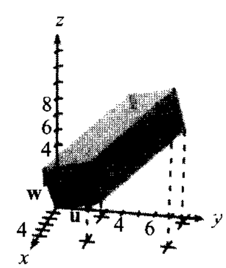
36. $\mathbf{u} = \langle 2, 0, 0 \rangle$
$\mathbf{v} = \langle 1, 1, 1 \rangle$
$\mathbf{w} = \langle 0, 2, 2 \rangle$

Volumen En los Ejercicios 37 y 38, usar el producto mixto para calcular el volumen del paralelepípedo con lados adyacentes **u**, **v**, **w**.

37. $\mathbf{u} = \mathbf{i} + \mathbf{j}$
$\mathbf{v} = \mathbf{j} + \mathbf{k}$
$\mathbf{w} = \mathbf{i} + \mathbf{k}$

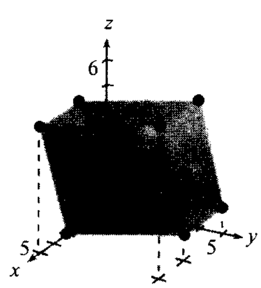
38. $\mathbf{u} = \langle 1, 3, 1 \rangle$
$\mathbf{v} = \langle 0, 5, 5 \rangle$
$\mathbf{v} = \langle 4, 0, 4 \rangle$



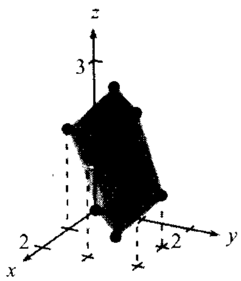


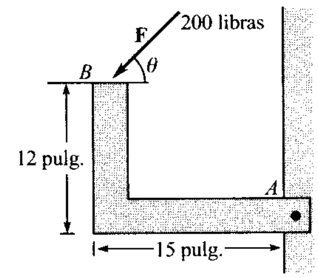
Volumen En los Ejercicios 39 y 40, calcular el volumen del paralelepípedo con los vértices dados (véase figuras).

39. (0, 0, 0), (3, 0, 0), (0, 5, 1), (3, 5, 1)
(2, 0, 5), (5, 0, 5), (2, 5, 6), (5, 5, 6)

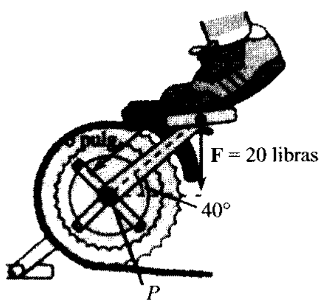


40. (0, 0, 0), (1, 1, 0), (1, 0, 2), (0, 1, 1)
(2, 1, 2), (1, 1, 3), (1, 2, 1), (2, 2, 3)

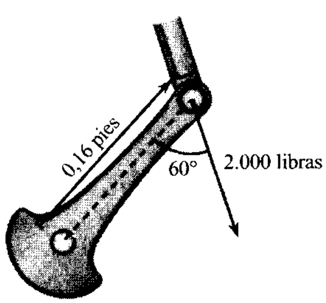




41. ***Momento*** Un niño frena una bicicleta aplicando una fuerza hacia abajo de 20 libras sobre el pedal cuando la manivela forma un ángulo de 40° con la horizontal (figura). Calcular el momento respecto de P si la manivela tiene 6 pulgadas de longitud.



42. ***Momento*** Tanto la magnitud como la dirección de la fuerza sobre un cigüeñal cambian cuando éste va girando. Calcular el momento sobre el cigüeñal con los datos de la figura.



43. ***Optimización*** Una fuerza de 200 libras actúa sobre el soporte de la figura.

a) Hallar el vector $\overrightarrow{AB}$ y el vector **F** que representa la fuerza (**F** ha de darse en términos de θ).

b) Calcular la magnitud del momento respecto de A calculando $\|\overrightarrow{AB} \times \mathbf{F}\|$.

c) Determinar, usando el resultado del apartado *b*), la magnitud del momento cuando $\theta = 30°$.

d) Hallar, usando el resultado de *b*), el ángulo θ cuando la magnitud del momento es máxima. Para ese ángulo, ¿qué relación hay entre los vectores **F** y $\overrightarrow{AB}$? ¿es la que esperaba? ¿Por qué?

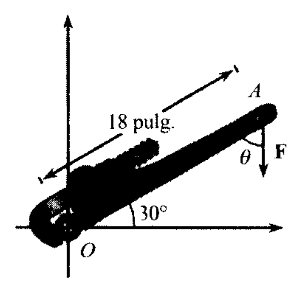
e) Representar la función que da la magnitud del momento respecto de A para $0° \leq \theta \leq 180°$. Hallar el cero de la función en ese dominio e interpretar el significado de ese cero en el contexto del problema.

44. ***Optimización*** Una fuerza de 60 libras actúa sobre la llave inglesa de la figura.

a) Calcular la magnitud del momento respecto de O evaluando $\|\overrightarrow{OA} \times \mathbf{F}\|$. Representar en una calculadora la función de θ resultante.

b) Usar el resultado del apartado *a*) para determinar la magnitud del momento cuando $\theta = 45°$.

c) Definir el ángulo θ, usando el apartado *a*), cuando la magnitud del momento sea máxima. ¿Es la respuesta que se esperaba? ¿Por qué?



En los Ejercicios 45-52, demostrar la propiedad del producto vectorial que se especifica.

45. $\mathbf{u} \times (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) + (\mathbf{u} \times \mathbf{w})$.

46. $c(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = (c\mathbf{u}) \times \mathbf{v} = \mathbf{u} \times (c\mathbf{v})$.

47. $\mathbf{u} \times \mathbf{u} = \mathbf{0}$.

48. $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w}$.

49. $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ es ortogonal a $\mathbf{u}$ y a $\mathbf{v}$.

50. $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \mathbf{0}$ si y sólo si $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son múltiplos escalares uno de otro.

51. $\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\| = \|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\|$ si $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son ortogonales.

52. $\mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{w})\mathbf{v} - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})\mathbf{w}$

53. Demostrar el Teorema 10.9.

54. ***Para pensar*** Si se doblan las longitudes de dos vectores, ¿cómo cambia la magnitud de su producto vectorial? Explicar la respuesta.

55. ***Para pensar*** Los vértices de un triángulo en el espacio son (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3). Explicar cómo se puede hallar un vector perpendicular al triángulo.