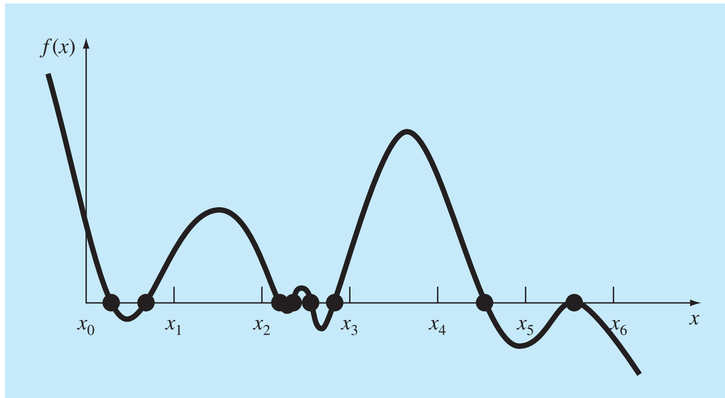

FIGURA 5.16
Casos donde las raíces pueden pasar inadvertidas debido a que la longitud del incremento en el método de búsqueda incremental es demasiado grande. Observe que la última raíz a la derecha es múltiple y podría dejar de considerarse independientemente de la longitud del incremento.

Un problema potencial en los métodos de búsqueda por incremento es el de escoger la longitud del incremento. Si la longitud es muy pequeña, la búsqueda llega a consumir demasiado tiempo. Por otro lado, si la longitud es demasiado grande, existe la posibilidad de que raíces muy cercanas entre sí pasen inadvertidas (figura 5.16). El problema se complica con la posible existencia de raíces múltiples. Un remedio parcial para estos casos consiste en calcular la primera derivada de la función $f'(x)$ al inicio y al final de cada intervalo. Cuando la derivada cambia de signo, puede existir un máximo o un mínimo en ese intervalo, lo que sugiere una búsqueda más minuciosa para detectar la posibilidad de una raíz.

Aunque estas modificaciones o el empleo de un incremento muy fino ayudan a resolver el problema, se debe aclarar que métodos tales como el de la búsqueda incremental no siempre resultan sencillos. Será prudente complementar dichas técnicas automáticas con cualquier otra información que dé idea de la localización de las raíces. Esta información se puede encontrar graficando la función y entendiendo el problema físico de donde proviene la ecuación.

PROBLEMAS

5.1 Determine las raíces reales de $f(x) = -0.5x^2 + 2.5x + 4.5$:

a) Gráficamente
b) Empleando la fórmula cuadrática
c) Usando el método de bisección con tres iteraciones para determinar la raíz más grande. Emplee como valores iniciales $x_l = 5$ y $x_u = 10$. Calcule el error estimado ε_a y el error verdadero ε_t para cada iteración.

5.2 Determine las raíces reales de $f(x) = 5x^3 - 5x^2 + 6x - 2$:

a) Gráficamente
b) Utilizando el método de bisección para localizar la raíz más pequeña. Use los valores iniciales $x_l = 0$ y $x_u = 1$ iterando hasta que el error estimado ε_a se encuentre debajo de $\varepsilon_s = 10\%$.

5.3 Determine las raíces reales de $f(x) = -25 1 82x - 90x^2 + 44x^3 - 8x^4 + 0.7x^5$:

a) Gráficamente
b) Usando el método de bisección para localizar la raíz más grande con $\varepsilon_s = 10\%$. Utilice como valores iniciales $x_l = 0.5$ y $x_u = 1.0$.
c) Realice el mismo cálculo que en *b*), pero con el método de la falsa posición y $\varepsilon_s = 0.2\%$.

5.4 Calcule las raíces reales de $f(x) = -12 - 21x + 18x^2 - 2.75x^3$:

a) Gráficamente
b) Empleando el método de la falsa posición con un valor ε_s correspondiente a tres cifras significativas para determinar la raíz más pequeña.

5.5 Localice la primera raíz no trivial de sen $x = x^2$, donde x está en radianes. Use una técnica gráfica y bisección con un intervalo inicial de 0.5 a 1. Haga el cálculo hasta que ε_a sea menor que $\varepsilon_s = 2\%$. Realice también una prueba de error sustituyendo la respuesta final en la ecuación original.

5.6 Determine la raíz real de $\ln x^2 = 0.7$:

a) Gráficamente
b) Empleando tres iteraciones en el método de bisección con los valores iniciales $x_l = 0.5$ y $x_u = 2$.
c) Usando tres iteraciones del método de la falsa posición, con los mismos valores iniciales de *b*).

5.7 Determine la raíz real de $f(x) = (0.8 - 0.3x)/x$:

a) Analíticamente
b) Gráficamente
c) Empleando tres iteraciones en el método de la falsa posición, con valores iniciales de 1 a 3. Calcule el error aproximado ε_a y el error verdadero ε_t en cada iteración.

5.8 Calcule la raíz cuadrada positiva de 18 usando el método de la falsa posición con $\varepsilon_s = 0.5\%$. Emplee como valores iniciales $x_l = 4$ y $x_u = 5$.

5.9 Encuentre la raíz positiva más pequeña de la función (x está en radianes) $x^2|\cos\sqrt{x}| = 5$ usando el método de la falsa posición. Para localizar el intervalo en donde se encuentra la raíz, grafique primero esta función para valores de x entre 0 y 5. Realice el cálculo hasta que ε_a sea menor que $\varepsilon_s = 1\%$. Compruebe su respuesta final sustituyéndola en la función original.

5.10 Encuentre la raíz positiva de $f(x) = x^4 - 8x^3 - 35x^2 + 450x - 1001$, utilizando el método de la falsa posición. Tome como valores iniciales a $x_l = 4.5$ y $x_u = 6$, y ejecute cinco iteraciones. Calcule los errores tanto aproximado como verdadero, con base en el hecho de que la raíz es 5.60979. Emplee una gráfica para explicar sus resultados y hacer el cálculo dentro de un $\varepsilon_s = 1.0\%$.

5.11 Determine la raíz real de $x^{3.5} = 80$:

a) En forma analítica.
b) Con el método de la falsa posición dentro de $\varepsilon_s = 2.5\%$. Haga elecciones iniciales de 2.0 a 5.0.

5.12 Dada

$$f(x) = -2x^6 - 1.5x^4 + 10x + 2$$

Use el método de la bisección para determinar el *máximo* de esta función. Haga elecciones iniciales de $x_l = 0$ y $x_u = 1$, y realice iteraciones hasta que el error relativo aproximado sea menor que 5%.

5.13 La velocidad v de un paracaidista que cae está dada por

$$v = \frac{gm}{c}\left(1 - e^{-(c/m)t}\right)$$

donde $g = 9.8$ m/s^2. Para un paracaidista con coeficiente de arrastre de $c = 15$ kg/s, calcule la masa m de modo que la velocidad sea $v = 35$ m/s en $t = 9$s. Utilice el método de la falsa posición para determinar m a un nivel de $\varepsilon_s = 0.1\%$.

5.14 Se carga una viga de la manera que se aprecia en la figura P5.14. Emplee el método de bisección para resolver la posición dentro de la viga donde no hay momento.

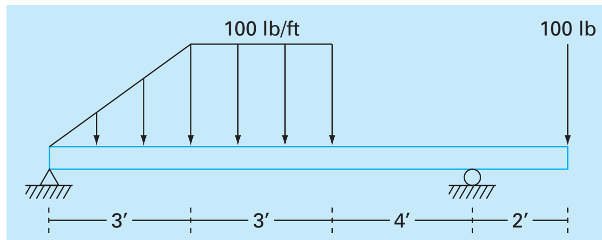

Figura P5.14

5.15 Por un canal trapezoidal fluye agua a una tasa de $Q = 20$ m^3/s. La profundidad crítica y para dicho canal satisface la ecuación

$$0 = 1 - \frac{Q^2}{gA_c^3}B$$

donde $g = 9.81$m/s^2, A_c = área de la sección transversal (m^2), y B = ancho del canal en la superficie (m). Para este caso, el ancho y el área de la sección transversal se relacionan con la profundidad y por medio de

$$B = 3 + y \qquad \text{y} \qquad A_c = 3y + \frac{y^2}{2}$$

Resuelva para la profundidad crítica con el uso de los métodos *a*) gráfico, *b*) bisección, y *c*) falsa posición. En los incisos *b*) y *c*), haga elecciones iniciales de $x_l = 0.5$ y $x_u = 2.5$, y ejecute iteraciones hasta que el error aproximado caiga por debajo del 1% o el número de interaciones supere a 10. Analice sus resultados.

5.16 Suponga el lector que está diseñando un tanque esférico (véase la figura P5.16) para almacenar agua para un poblado pequeño en un país en desarrollo. El volumen de líquido que puede contener se calcula con

$$V = \pi h^2 \frac{[3R - h]}{3}$$

donde V = volumen [m^3], h = profundidad del agua en el tanque [m], y R = radio del tanque [m].

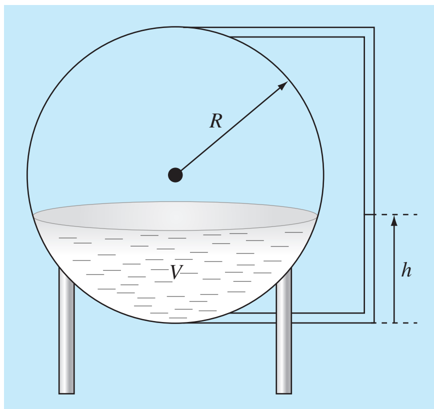

Figura P5.16

Si R = 3m, ¿a qué profundidad debe llenarse el tanque de modo que contenga 30 m^3? Haga tres iteraciones con el método de la falsa posición a fin de obtener la respuesta. Determine el error relativo aproximado después de cada iteración.

5.17 La concentración de saturación de oxígeno disuelto en agua dulce se calcula con la ecuación (APHA, 1992)

$$\ln o_{sf} = -139.34411 + \frac{1.575701 \times 10^5}{T_a} - \frac{6.642308 \times 10^7}{T_a^2} + \frac{1.243800 \times 10^{10}}{T_a^3} - \frac{8.621949 \times 10^{11}}{T_a^4}$$

donde o_{sf} = concentración de saturación de oxígeno disuelto en agua dulce a 1 atm (mg/L) y T_a = temperatura absoluta (K). Recuerde el lector que $T_a = T + 273.15$, donde T = temperatura (ºC). De acuerdo con esta ecuación, la saturación disminuye con el incremento de la temperatura. Para aguas naturales comunes en climas templados, la ecuación se usa para determinar que la concentración de oxígeno varía de 14.621 mg/L a 0ºC a 6.413 mg/L a 40ºC. Dado un valor de concentración de oxígeno, puede emplearse esta fórmula y el método de bisección para resolver para la termperatura en ºC.

a) Si los valores iniciales son de 0 y 40ºC, con el método de la bisección, ¿cuántas iteraciones se requerirían para determinar la temperatura con un error absoluto de 0.05ºC.
b) Desarrolle y pruebe un programa para el método de bisección a fin de determinar T como función de una concentración dada de oxígeno, con un error absoluto preespecificado como en el inciso *a*). Dadas elecciones iniciales de 0 y 40ºC, pruebe su programa para un error absoluto de 0.05ºC para los casos siguientes: o_{sf} = 8, 10 y 12 mg/L. Compruebe sus resultados.

5.18 Integre el algoritmo que se bosquejó en la figura 5.10, en forma de subprograma completo para el método de bisección amigable para el usuario. Entre otras cosas:

a) Construya enunciados de documentación en el subprograma a fin de identificar lo que se pretende que realice cada sección.
b) Etiquete la entrada y la salida.
c) Agregue una comprobación de la respuesta, en la que se sustituya la estimación de la raíz en la función original para verificar si el resultado final se acerca a cero.
d) Pruebe el subprograma por medio de repetir los cálculos de los ejemplos 5.3 y 5.4.

5.19 Desarrolle un subprograma para el método de bisección que minimice las evaluaciones de la función, con base en el seudocódigo que se presenta en la figura 5.11. Determine el número de evaluaciones de la función (n) para el total de iteraciones. Pruebe el programa con la repetición del ejemplo 5.6.

5.20 Desarrolle un programa amigable para el usuario para el método de la falsa posición. La estructura del programa debe ser similar al algoritmo de la bisección que se bosquejó en la figura 5.10. Pruebe el programa con la repetición del ejemplo 5.5.

5.21 Desarrolle un subprograma para el método de la falsa posición que minimice las evaluaciones de la función en forma similar a la figura 5.11. Determine el número de evaluaciones de la función (n) para el total de iteraciones. Pruebe el programa por medio de la duplicación del ejemplo 5.6.

5.22 Desarrolle un subprograma amigable para el usuario para el método de la falsa posición modificado, con base en la figura 5.15. Pruebe el programa con la determinación de la raíz de la función del ejemplo 5.6. Ejecute corridas hasta que el error relativo porcentual verdadero esté por debajo de 0.01%. Elabore una gráfica en papel semilogarítmico de los errores relativo, porcentual, aproximado y verdadero, *versus* el número de iteraciones. Interprete los resultados.