## Ejercicios de la Sección 10.3

En los Ejercicios 1-6, calcular *a*) $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$, *b*) $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}$, *c*) $\|\mathbf{u}\|^2$, *d*) $(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})\mathbf{v}$, y *e*) $\mathbf{u} \cdot (2\mathbf{v})$

**1.** $\mathbf{u} = \langle 3, 4 \rangle$, $\mathbf{v} = \langle 2, -3 \rangle$

**2.** $\mathbf{u} = \langle 5, 12 \rangle$, $\mathbf{v} = \langle -3, 2 \rangle$

**3.** $\mathbf{u} = \langle 2, -3, 4 \rangle$, $\mathbf{v} = \langle 0, 6, 5 \rangle$

**4.** $\mathbf{u} = \mathbf{i}$, $\mathbf{v} = \mathbf{i}$

**5.** $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{v} = \mathbf{i} - \mathbf{k}$

**6.** $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$, $\mathbf{v} = \mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$

**7.** ***Ingresos*** El vector $\mathbf{u} = \langle 3.240, 1.450, 2.235 \rangle$ da el número de unidades de los productos *X, Y, Z* y el vector $\mathbf{v} = \langle 2{,}22, 1{,}85, 3{,}25 \rangle$ da el precio, en dólares, por unidad de cada uno de esos productos. Calcular el producto escalar $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ y explicar qué información ofrece.

**8.** ***¿Verdadero o falso?*** Si $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}$ y $\mathbf{u} \neq 0$, entonces ¿es necesariamente cierto que $\mathbf{v} = \mathbf{w}$? Si es falso, explicar por qué o dar un ejemplo que demuestre su falsedad.

En los Ejercicios 9 y 10, calcular $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$

**9.** $\|\mathbf{u}\| = 8$, $\|\mathbf{v}\| = 5$, y el ángulo entre **u** y **v** es $\pi/3$.

**10.** $\|\mathbf{u}\| = 40$, $\|\mathbf{v}\| = 25$, y el ángulo entre **u** y **v** es $5\pi/6$.

En los Ejercicios 11-18, hallar el ángulo $\theta$ entre los vectores.

**11.** $\mathbf{u} = \langle 1, 1 \rangle$, $\mathbf{v} = \langle 2, -2 \rangle$

**12.** $\mathbf{u} = \langle 3, 1 \rangle$, $\mathbf{v} = \langle 2, -1 \rangle$

**13.** $\mathbf{u} = 3\mathbf{i} + \mathbf{j}$, $\mathbf{v} = -2\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$

**14.** $\mathbf{u} = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\mathbf{i} + \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right)\mathbf{j}$, $\mathbf{v} = \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)\mathbf{i} + \operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{4}\right)\mathbf{j}$

**15.** $\mathbf{u} = \langle 1, 1, 1 \rangle$, $\mathbf{v} = \langle 2, 1, -1 \rangle$

**16.** $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{v} = -3\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$

**17.** $\mathbf{u} = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$, $\mathbf{v} = -2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$

**18.** $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{v} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$

**19.** ***Programación*** Escribir un programa que, dados dos vectores **u** y **v** en forma de componentes, calcule *a*) $\|\mathbf{u}\|$, *b*) $\|\mathbf{v}\|$, y *c*) el ángulo entre **u** y **v**.

**20.** Usando el Ejercicio 19 hallar el ángulo entre los vectores
*a*) $\mathbf{u} = \langle 3, 4 \rangle$, $\mathbf{v} = \langle -7, 5 \rangle$
*b*) $\mathbf{u} = \langle 8, -4, 2 \rangle$, $\mathbf{v} = \langle 2, 5, 2 \rangle$

En los Ejercicios 21-28, averiguar si **u** y **v** son ortogonales, paralelos o ninguna de ambas cosas.

**21.** $\mathbf{u} = \langle 4, 0 \rangle$, $\mathbf{v} = \langle 1, 1 \rangle$

**22.** $\mathbf{u} = \langle 2, 18 \rangle$, $\mathbf{v} = \left\langle \frac{3}{2}, -\frac{1}{6} \right\rangle$

**23.** $\mathbf{u} = \langle 4, 3 \rangle$, $\mathbf{v} = \left\langle \frac{1}{2}, -\frac{2}{3} \right\rangle$

**24.** $\mathbf{u} = -\frac{1}{3}(\mathbf{i} - 2\mathbf{j})$, $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} - 4\mathbf{j}$

**25.** $\mathbf{u} = \mathbf{j} + 6\mathbf{k}$, $\mathbf{v} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$

**26.** $\mathbf{u} = -2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - \mathbf{k}$, $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$

**27.** $\mathbf{u} = \langle 2, -3, 1 \rangle$, $\mathbf{v} = \langle -1, -1, -1 \rangle$

**28.** $\mathbf{u} = \langle \cos\theta, \operatorname{sen}\theta, -1 \rangle$, $\mathbf{v} = \langle \operatorname{sen}\theta, -\cos\theta, 0 \rangle$

**29.** Probar, usando vectores, que las diagonales de un rombo son perpendiculares.

**30.** ***Ángulo de enlace*** Consideremos un tetraedro regular con vértices $(0, 0, 0)$, $(k, k, 0)$, $(k, 0, k)$ y $(0, k, k)$, donde $k$ denota un número real positivo.
*a*) Dibujar el tetraedro.
*b*) Calcular la longitud de sus aristas.
*c*) Hallar, mediante el producto escalar, el ángulo entre dos aristas.
*d*) Calcular el ángulo entre los segmentos que van del centroide $(k/2, k/2, k/2)$ a dos vértices. Éste es el *ángulo de enlace* para una molécula tal como $CH_4$, o $PbCl_4$, cuya estructura tiene forma de tetraedro.

**31.** ***Para pensar*** ¿Qué se puede decir acerca del ángulo $\theta$ entre dos vectores no nulos **u** y **v**, si
*a*) $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$? *b*) $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} > 0$? *c*) $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} < 0$?

**32.** ***¿Verdadero o falso?*** Si **u** y **v** son ortogonales a **w**, ¿es **u** + **v** ortogonal a **w**? En caso afirmativo, demostrarlo. En caso negativo, explicar por qué es falso o dar un ejemplo que confirme su falsedad.

**33.** Consideremos los vectores $\mathbf{u} = \langle \cos\alpha, \operatorname{sen}\alpha, 0 \rangle$ y $\mathbf{v} = \langle \cos\beta, \operatorname{sen}\beta, 0 \rangle$, donde $\alpha > \beta$. Calcular su producto escalar y usarlo para demostrar la identidad

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta$$