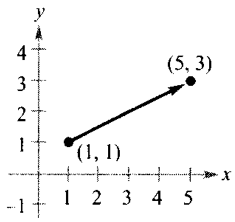
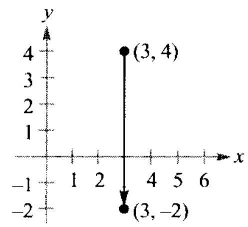
Ejercicios de la Sección 10.1

En los Ejercicios 1-4, *a*) expresar el vector **v** en componentes, y *b*) dibujar **v** con punto inicial en el origen.

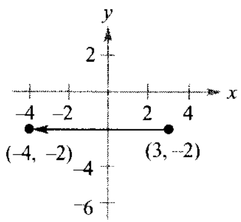
1.



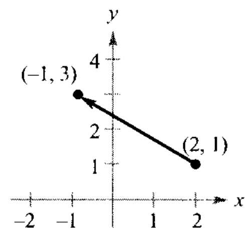
2.



3.



4.



En los Ejercicios 5-12, se dan los puntos inicial y final de un vector **v**. *a*) Dibujar el segmento dirigido asociado a **v**, *b*) expresar **v** en componentes, y *c*) dibujar el vector con su punto inicial en el origen.

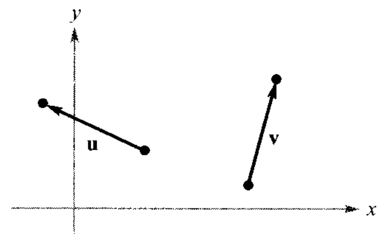
	Punto inicial	*Punto final*
5.	$(1, 2)$	$(5, 5)$
6.	$(3, -5)$	$(4, 7)$
7.	$(10, 2)$	$(6, -1)$
8.	$(0, -4)$	$(-5, -1)$
9.	$(6, 2)$	$(6, 6)$
10.	$(7, -1)$	$(-3, -1)$
11.	$\left(\frac{3}{2}, \frac{4}{3}\right)$	$\left(\frac{1}{2}, 3\right)$
12.	$(0{,}12, 0{,}60)$	$(0{,}84, 1{,}25)$

En los Ejercicios 13 y 14, dibujar el múltiplo escalar de **v**.

13. $\mathbf{v} = \langle 2, 3\rangle$ *a*) $2\mathbf{v}$ *b*) $-3\mathbf{v}$ *c*) $\frac{7}{2}\mathbf{v}$ *d*) $\frac{2}{3}\mathbf{v}$

14. $\mathbf{v} = \langle -1, 5\rangle$ *a*) $4\mathbf{v}$ *b*) $-\frac{1}{2}\mathbf{v}$ *c*) $0\mathbf{v}$ *d*) $-6\mathbf{v}$

En los Ejercicios 15-18, usar la figura para dibujar el vector indicado.



15. $-\mathbf{u}$

16. $2\mathbf{u}$

17. $\mathbf{u} - \mathbf{v}$

18. $\mathbf{u} + 2\mathbf{v}$

En los Ejercicios 19-22, hallar el vector **v**, siendo $\mathbf{u} = \langle 2, -1\rangle$ y $\mathbf{w} = \langle 1, 2\rangle$. Ilustrar las operaciones gráficamente.

19. $\mathbf{v} = \frac{3}{2}\mathbf{u}$

20. $\mathbf{v} = \mathbf{u} + \mathbf{w}$

21. $\mathbf{v} = \mathbf{u} + 2\mathbf{w}$

22. $\mathbf{v} = \mathbf{u} - 2\mathbf{w}$

En los Ejercicios 23-28, determinar a y b de manera que $\mathbf{v} = a\mathbf{u} + b\mathbf{w}$, siendo $\mathbf{u} = \langle 1, 2\rangle$ y $\mathbf{w} = \langle 1, -1\rangle$

23. $\mathbf{v} = \langle 2, 1\rangle$

24. $\mathbf{v} = \langle 0, 3\rangle$

25. $\mathbf{v} = \langle 3, 0\rangle$

26. $\mathbf{v} = \langle 3, 3\rangle$

27. $\mathbf{v} = \langle 1, 1\rangle$

28. $\mathbf{v} = \langle -1, 7\rangle$

En los Ejercicios 29 y 30, se dan un vector **v** y su punto inicial. Hallar su punto final.

29. $\mathbf{v} = \langle -1, 3\rangle$, punto inicial $(4, 2)$

30. $\mathbf{v} = \langle 4, -9\rangle$ punto inicial $(3, 2)$

En los Ejercicios 31-36, calcular la longitud de **v**.

31. $\mathbf{v} = \langle 4, 3\rangle$

32. $\mathbf{v} = \langle 12, -5\rangle$

33. $\mathbf{v} = 6\mathbf{i} - 5\mathbf{j}$

34. $\mathbf{v} = -10\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$

35. $\mathbf{v} = 4\mathbf{j}$

36. $\mathbf{v} = \mathbf{i} - \mathbf{j}$

En los Ejercicios 37-40, calcular

a) $\|\mathbf{u}\|$ *b*) $\|\mathbf{v}\|$ *c*) $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|$

d) $\left\|\frac{\mathbf{u}}{\|\mathbf{u}\|}\right\|$ *e*) $\left\|\frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|}\right\|$ *f*) $\left\|\frac{\mathbf{u}+\mathbf{v}}{\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|}\right\|$

37. $\mathbf{u} = \langle 1, -1\rangle$
$\mathbf{v} = \langle -1, 2\rangle$

38. $\mathbf{u} = \langle 0, 1\rangle$
$\mathbf{v} = \langle 3, -3\rangle$

39. $\mathbf{u} = \left\langle 1, \frac{1}{2} \right\rangle$
$\mathbf{v} = \langle 2, 3 \rangle$

40. $\mathbf{u} = \langle 2, -4 \rangle$
$\mathbf{v} = \langle 5, 5 \rangle$

En los Ejercicios 41 y 42, verificar la desigualdad triangular para los vectores **u** y **v**.

41. $\mathbf{u} = \langle 2, 1 \rangle$
$\mathbf{v} = \langle 5, 4 \rangle$

42. $\mathbf{u} = \langle -3, 2 \rangle$
$\mathbf{v} = \langle 1, -2 \rangle$

En los Ejercicios 43-46, hallar el vector **v** cuya magnitud se especifica y con la misma dirección que **u**.

	Magnitud	*Dirección*
43.	$\|\mathbf{v}\| = 4$	$\mathbf{u} = \langle 1, 1 \rangle$
44.	$\|\mathbf{v}\| = 4$	$\mathbf{u} = \langle -1, 1 \rangle$
45.	$\|\mathbf{v}\| = 2$	$\mathbf{u} = \langle \sqrt{3}, 3 \rangle$
46.	$\|\mathbf{v}\| = 3$	$\mathbf{u} = \langle 0, 3 \rangle$

En los Ejercicios 47-50, hallar un vector unitario *a*) paralelo a, y *b*) normal a la gráfica de $f(x)$ en el punto indicado.

	Función	*Punto*
47.	$f(x) = x^3$	$(1, 1)$
48.	$f(x) = x^3$	$(-2, -8)$
49.	$f(x) = \sqrt{25 - x^2}$	$(3, 4)$
50.	$f(x) = \operatorname{tg} x$	$\left(\frac{\pi}{4}, 1\right)$

En los Ejercicios 51-54, expresar **v** en componentes, conociendo su magnitud y el ángulo que forma con el semieje x positivo.

	Magnitud	*Ángulo*
51.	$\|\mathbf{v}\| = 3$	$\theta = 0°$
52.	$\|\mathbf{v}\| = 1$	$\theta = 45°$
53.	$\|\mathbf{v}\| = 2$	$\theta = 150°$
54.	$\|\mathbf{v}\| = 1$	$\theta = 3{,}5°$

En los Ejercicios 55-58, expresar en componentes **u** + **v**, dadas las longitudes de **u** y **v** así como los ángulos que **u** y **v** forman con el semieje x positivo.

55. $\|\mathbf{u}\| = 1,\ \theta_{\mathbf{u}} = 0°$
$\|\mathbf{v}\| = 3,\ \theta_{\mathbf{v}} = 45°$

56. $\|\mathbf{u}\| = 4,\ \theta_{\mathbf{u}} = 0°$
$\|\mathbf{v}\| = 2,\ \theta_{\mathbf{v}} = 60°$

57. $\|\mathbf{u}\| = 2,\ \theta_{\mathbf{u}} = 4$
$\|\mathbf{v}\| = 1,\ \theta_{\mathbf{v}} = 2$

58. $\|\mathbf{u}\| = 5,\ \theta_{\mathbf{u}} = -0{,}5$
$\|\mathbf{v}\| = 5,\ \theta_{\mathbf{v}} = 0{,}5$

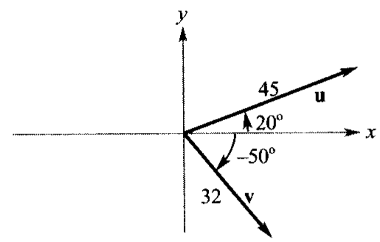
En los Ejercicios 59 y 60, expresar **v** en componentes, dadas las magnitudes de **u** y de **u** + **v**, así como los ángulos que **u** y **u** + **v** forman con el semieje x positivo.

59. $\|\mathbf{u}\| = 1,\ \theta = 45°$
$\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| = \sqrt{2},\ \theta = 90°$

60. $\|\mathbf{u}\| = 4,\ \theta = 30°$
$\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| = 6,\ \theta = 120°$

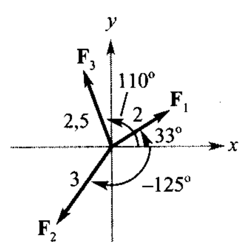
61. ***Programación*** Escribir un programa que, dadas las longitudes y los ángulos que forman **u** y **v** con el semieje x positivo, calcule
a) **u** + **v**
b) $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|$
c) El ángulo que forma **u** + **v** con el semieje x positivo.

62. Usando el programa del ejercicio anterior, calcular la longitud y la dirección de la resultante de los vectores.

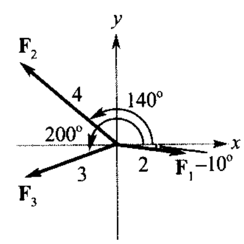


En los Ejercicios 63 y 64, usar calculadora gráfica para hallar la longitud y la dirección de la resultante de los vectores.

63.



64.



65. ***Para pensar*** Dos fuerzas de igual magnitud actúan sobre un mismo punto.
a) Si la magnitud de la resultante es la suma de sus magnitudes, enunciar una conjetura sobre el ángulo entre ellas.
b) Si la resultante de las dos fuerzas es **0**, enunciar una conjetura acerca del ángulo que forman entre sí.
c) ¿Puede ser la magnitud de la resultante mayor que la suma de las magnitudes de las dos fuerzas? Explicar la respuesta.

66. ***Razonamiento gráfico*** Consideremos las dos fuerzas $\mathbf{F}_1 = \langle 20, 0 \rangle$ y $\mathbf{F}_2 = 10\ \langle \cos \theta, \operatorname{sen} \theta \rangle$.
a) Hallar $\|\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2\|$.
b) Calcular la magnitud de la resultante en función de θ. Representar en una calculadora la función para $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$.

c) Usar esa gráfica para determinar el recorrido de la función. ¿Cuál es el máximo y en qué valor de θ se alcanza? ¿Cuál es el mínimo y en qué valor de θ se alcanza?

d) Explicar por qué la magnitud de la resultante nunca es 0.

67. ***Análisis numérico y gráfico*** Sobre la alcayata de la figura actúan dos fuerzas de 180 y 250 newtons que forman entre sí un ángulo de θ grados.

a) Si $\theta = 30°$, hallar la dirección y magnitud de la fuerza resultante (suma de vectores).

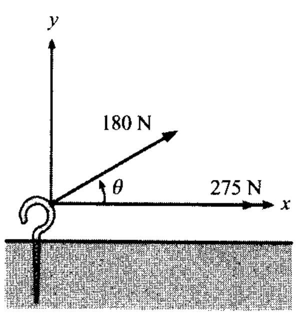
b) Expresar la magnitud M de la resultante y su dirección α en función de θ, con $0° \leqslant \theta \leqslant 180°$.

c) Usar una calculadora para completar la tabla.

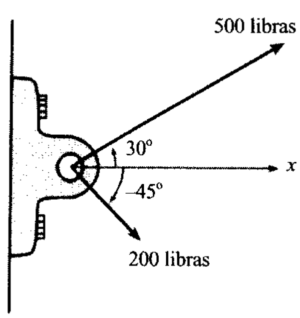
θ	0°	30°	60°	90°	120°	150°	180°
M							
α							

d) Representar en la calculadora las funciones M y α.

e) Explicar por qué sólo una de esas dos funciones decrece al crecer θ.



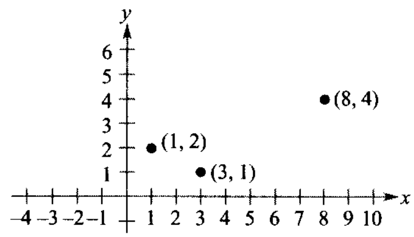
68. ***Fuerza resultante*** Calcular la magnitud y la dirección de la fuerza resultante de las que se muestran en la figura adjunta.



69. ***Fuerza resultante*** Tres fuerzas de 75, 100 y 125 libras actúan sobre un objeto formando ángulos respectivos de 30°, 45° y 120° con el semieje x positivo. Calcular la magnitud y dirección de la resultante.

70. ***Fuerza resultante*** Tres fuerzas de 300, 180 y 250 newtons actúan sobre un punto formando ángulos respectivos de −30°, 45° y 135° con el semieje x positivo. Calcular la magnitud y dirección de la resultante.

71. Tres vértices de un paralelogramo son (1, 2), (3, 1) y (8, 4). Hallar los tres candidatos a cuarto vértice (véase figura).



72. Usando vectores, hallar los puntos de trisección del segmento que une los puntos (1, 2) y (7, 5).

73. ***Análisis numérico y gráfico*** Una pelota que pesa una libra se aparta del mástil de sujeción (véase figura) mediante una fuerza horizontal **u** hasta que la cuerda forma un ángulo θ con el mástil.

a) Calcular la tensión resultante en la cuerda y la magnitud de **u** para $\theta = 30°$.

b) Escribir la tensión T de la cuerda y la magnitud de **u** en función de θ. Determinar el dominio de esas dos funciones.

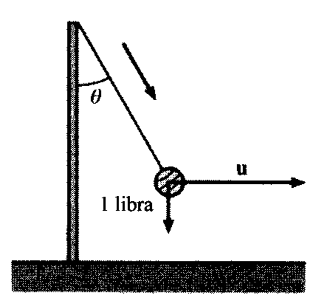
c) Usar una calculadora para completar la tabla.

θ	0°	10°	20°	30°	40°	50°	60°
T							
$\|\mathbf{u}\|$							

d) Representar en la calculadora las gráficas de las dos funciones para $0° \leqslant \theta \leqslant 60°$.

e) Comparar T y $\|\mathbf{u}\|$ cuando θ crece.

f) Calcular, si es posible, $\lim_{\theta \to \pi/2} T$ y $\lim_{\theta \to \pi/2} \|\mathbf{u}\|$. ¿Esperaba estos resultados? Explique la respuesta.



74. ***Análisis numérico y gráfico*** Una gabarra cargada es arrastrada por dos remolcadores y la fuerza resultante es de 6.000 libras en la dirección del eje de la gabarra (véase figura). El cable de cada remolcador forma un ángulo θ con ese eje.

a) Calcular la tensión en los cables de los remolcadores para $\theta = 20^\circ$.

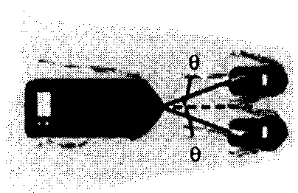
b) Expresar la tensión T de cada uno de ellos como función de θ y determinar el dominio de la función.

c) Completar la tabla con ayuda de una calculadora.

θ	10°	20°	30°	40°	50°	60°
T						

d) Representar en la calculadora la función obtenida.

e) Explicar por qué la tensión crece al crecer θ.

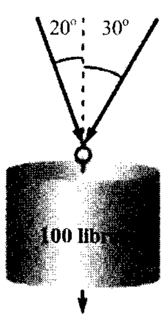


75. ***Movimiento de un proyectil*** Un rifle, que imprime a la bala una velocidad inicial de 1.200 pies/s, se dispara con un ángulo de elevación de 6°. Hallar las componentes horizontal y vertical de la velocidad.

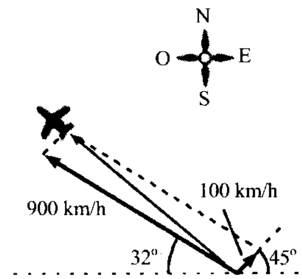
76. ***Carga compartida*** Dos trabajadores transportan una carga de 100 libras tirando de dos cuerdas en la disposición que indica la figura.

a) Si la fuerza resultante es vertical, hallar la tensión en cada una de las dos cuerdas.

b) Calcular la componente vertical de la fuerza de cada trabajador.



77. ***Navegación aérea*** Un avión vuela en dirección 32° norte-oeste con una velocidad relativa al aire de 900 km/h. El viento sopla del sudoeste a 100 km/h (véase figura). ¿Cuál es la verdadera dirección de vuelo y la velocidad respecto del suelo?



78. ***Navegación aérea*** Un avión vuela hacia el este con velocidad constante, respecto del suelo, de 450 millas/h y de repente encuentra un viento que sopla del noroeste a 50 millas/h. Hallar la velocidad y dirección del avión con las que conseguirá mantener la velocidad respecto del suelo y la dirección este que llevaba.

79. Si $\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3 = \mathbf{0}$, hallar T_2 y T_3.
$\mathbf{F}_1 = -3.600\mathbf{j}$, $\quad \mathbf{F}_2 = T_2(\cos 35^\circ\mathbf{i} - \operatorname{sen} 35^\circ\mathbf{j})$.
$\mathbf{F}_3 = T_3(\cos 92^\circ\mathbf{i} + \operatorname{sen} 92^\circ\mathbf{j})$

80. Demostrar que $\mathbf{u} = (\cos\theta)\mathbf{i} - (\operatorname{sen}\theta)\mathbf{j}$ y $\mathbf{v} = (\operatorname{sen}\theta)\mathbf{i} + (\cos\theta)\mathbf{j}$ son vectores unitarios para cualquier valor del ángulo θ.

81. ***Geometría*** Usando vectores, probar que el segmento que une los puntos medios de dos lados de un triángulo es paralelo al tercer lado y tiene longitud mitad de la de éste.

82. ***Geometría*** Usando vectores, demostrar que las diagonales de un paralelogramo se cortan en sus puntos medios.

83. Demostrar que el vector $\mathbf{w} = \|\mathbf{u}\|\mathbf{v} + \|\mathbf{v}\|\mathbf{u}$ biseca el ángulo entre $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$.

¿Verdadero o falso? En los Ejercicios 84-89, discutir si el enunciado es correcto. Si no lo es, explicar la razón o dar un ejemplo que muestre su falsedad.

84. Si $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ tienen la misma magnitud y dirección, entonces $\mathbf{u} = \mathbf{v}$.

85. Si $\mathbf{u}$ es un vector unitario en la dirección de $\mathbf{v}$, entonces $\mathbf{v} = \|\mathbf{v}\|\mathbf{u}$.

86. Si $\mathbf{u} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$ es un vector unitario, entonces $a^2 + b^2 = 1$.

87. Si $\mathbf{v} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j} = \mathbf{0}$, entonces $a = -b$.

88. Si $a = b$, entonces $\|a\mathbf{i} + b\mathbf{j}\| = \sqrt{2}a$.

89. Si $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ tienen la misma magnitud y direcciones opuestas, entonces $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{0}$.